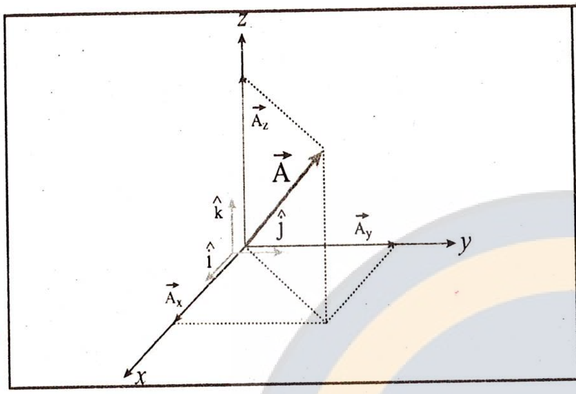
# ২

# ভেক্টর
## VECTOR




বস্তুজগতের যত পরিমেয় রাশি আছে তাদেরকে আমরা দু ভাগে ভাগ করতে পারি—স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি। দুটি বল কোনো বস্তুর উপর আনতভাবে ক্রিয়া করলে বস্তুটি দুটি বলের কোনোটির দিকে না গিয়ে তৃতীয় একটা দিকে যাবে। এ রকমটা কেন হয় তা জানার জন্য আমাদের পড়তে হয় ভেক্টর বীজগণিত। পদার্থবিজ্ঞানের ভাষা হচ্ছে গণিত। গণিতের একটি গুরুত্বপূর্ণ শাখা হচ্ছে ক্যালকুলাস। ভেক্টর ও ক্যালকুলাসের ব্যবহার আমাদের হিসাব-নিকাশকে সহজ করে দিয়েছে। আমাদের শিক্ষাক্রমের এ পর্যায়ে ভেক্টর ও ক্যালকুলাসের ব্যাপক প্রয়োগ রয়েছে। এ অধ্যায়ে আমরা তাই ভেক্টর ও ক্যালকুলাস নিয়ে আলোচনা করবো।

**প্রধান শব্দসমূহ :**
ভেক্টর রাশি, স্কেলার রাশি, সমান ভেক্টর, ঋণাত্মক ভেক্টর, নাল ভেক্টর, একক ভেক্টর, আয়ত একক ভেক্টর, অবস্থান ভেক্টর, ভেক্টরের বিভাজন, উপাংশ, ভেক্টরের স্কেলার গুণফল, ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল, অপারেটর, গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স ও কার্ল।

**এ অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—**

| ক্রমিক নং | শিখন ফল | অনুচ্ছেদ |
|---|---|---|
| ১ | ভেক্টরের ধর্ম ব্যাখ্যা করতে পারবে। | ২.১ |
| ২ | পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন ভৌত রাশি ভেক্টররূপে প্রকাশ করতে পারবে। | ২.২ |
| ৩ | কতিপয় বিশেষ ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবে। | ২.৪ |
| ৪ | ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক যোজন নিয়ম ব্যাখা করতে পারবে। | ২.৫, ২.৬ |
| ৫ | লম্বাংশের সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোজন ও বিয়োজন বিশ্লেষণ করতে পারবে। | ২.৭ |
| ৬ | একটি ভেক্টরকে ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিস্তারের ক্ষেত্রে লম্বাংশে বিভাজন করতে পারবে। | ২.৭ |
| ৭ | দু'টি ভেক্টর রাশির স্কেলার ও ভেক্টর গুণের সংজ্ঞার্থ ও এদের ব্যবহার করতে পারবে। | ২.৯, ২.১০ |
| ৮ | পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাসের ব্যবহার ও গুরুত্ব ব্যাখ্যা করতে পারবে। | ২.১১ |
| ৯ | ভেক্টর ক্যালকুলাসের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে। | ২.১২ |
| ১০ | ভেক্টর অপারেটর ব্যবহার করতে পারবে। | ২.১২ |

## ২.১। ভেক্টর রাশি ও স্কেলার রাশি
### Vector and Scalar Quantities

**বস্তু জগতে যা কিছু পরিমাপ করা যায় তাকেই রাশি বলে।** যেমন– কোনো বস্তুর দৈর্ঘ্য, ভর, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদি সবই রাশি। বস্তু জগতের এ সকল ভৌত রাশিকে বর্ণনার জন্য কোনো কোনোটির দিক নির্দেশের প্রয়োজন হয়, আর কোনো কোনো রাশির দিক নির্দেশের প্রয়োজন হয় না। তাই দিক বিবেচনা করে যাবতীয় রাশিকে দুভাগে ভাগ করা যায়; যথা :

১. সদিক রাশি বা ভেক্টর রাশি,

২. নির্দিক রাশি বা স্কেলার রাশি।

**ভেক্টর রাশি : যে সকল ভৌত রাশিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য মান ও দিক উভয়ের প্রয়োজন হয় তাদেরকে ভেক্টর রাশি বলে।** যেমন- সরণ, ওজন, বেগ, ত্বরণ, বল ইত্যাদি।

**স্কেলার রাশি : যে সকল ভৌত রাশিকে শুধু মান দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়, দিক নির্দেশের প্রয়োজন হয় না তাদেরকে স্কেলার রাশি বলে।** দৈর্ঘ্য, ভর, দ্রুতি, কাজ ইত্যাদি স্কেলার রাশির উদাহরণ।

**ভেক্টর রাশির ধর্ম**

১. ভেক্টর রাশিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য মান ও দিক উভয়ের প্রয়োজন হয়।

২. শুধু মান অথবা শুধু দিক অথবা উভয়ের পরিবর্তন হলে ভেক্টর রাশির পরিবর্তন হয়।

৩. ভেক্টর রাশির যোগ, বিয়োগ, গুণ ইত্যাদি সাধারণ গাণিতিক নিয়মে হয় না, ভেক্টর বীজগণিতের নিয়মানুসারে হয়।

৪. দুটি ভেক্টর রাশির মধ্যে কোনোটির মান শূন্য না হলেও তাদের গুণফল শূন্য হতে পারে।

৫. দুটি ভেক্টর রাশির গুণফল গুণের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে একটি স্কেলার রাশি হতে পারে অথবা একটি ভেক্টর রাশি হতে পারে।

## ২.২। ভেক্টর রাশির কয়েকটি বিশেষ উদাহরণ
### Few Special Examples of Vectors

**তল :** কোনো বস্তুর তল বা পৃষ্ঠ অবশ্যই একটি স্কেলার রাশি। এর কোনো দিক নেই। কিন্তু অনেক সময় উচ্চতর হিসাব নিকাশের জন্য যেমন কোনো মহাকর্ষীয়, তড়িৎ বা চৌম্বক ক্ষেত্রে কোনো পৃষ্ঠ বা তলের ক্ষুদ্র অংশকে ভেক্টর হিসেবে গণ্য করা হয়। এর দিক ধরা হয় ঐ তলের কোনো বিন্দুতে তলের সাথে অভিলম্ব বরাবর।

**বল :** দৈনন্দিন অভিজ্ঞতা থেকে আমরা দেখি যে ঠেলা বা টানাই হচ্ছে বল। আমরা যখন কোনো বস্তুকে ঠেলি, তখন আসলে আমরা বস্তুটির উপর নির্দিষ্ট দিকে একটি বল প্রয়োগ করি। পৃথিবী কোনো বস্তুকে তার কেন্দ্রের দিকে টানে অর্থাৎ মহাকর্ষ বল প্রয়োগ করে। যেহেতু ঠেলা বা টানার মান ও দিক উভয়ই আছে, তাই বল একটি ভেক্টর রাশি। বলের দিক হচ্ছে যে দিকে বস্তুটিকে ঠেলা বা টানা হচ্ছে সে দিকে।

**কেন্দ্রমুখী বল :** কোনো বস্তু যখন কোনো বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্তাকার পথে ঘুরে তখন একটি বল বস্তুর উপর বৃত্তের ব্যাসার্ধ বরাবর কেন্দ্রের দিকে ক্রিয়া করে বস্তুটিকে বৃত্তাকার পথে ঘুরায়। এ বলের নাম কেন্দ্রমুখী বল। নিঃসন্দেহে এটি একটি ভেক্টর রাশি। এর দিক বস্তু থেকে ব্যাসার্ধ বরাবর বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে। আমরা চতুর্থ অধ্যায়ে এ সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করবো।

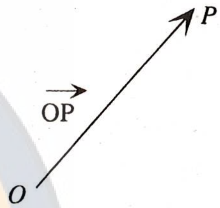
**টর্ক :** কোনো বস্তুর উপর নিট বল ক্রিয়া করলে তার ত্বরণ ঘটে। আসলে বস্তুর ত্বরণ তার উপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক। যখন কোনো একটি বল বা একজোড়া সমান সমান্তরাল ও বিপরীতমুখী বল কোনো বস্তুকে কোনো বিন্দু বা অক্ষকে কেন্দ্র করে ঘুরায়, তখন বস্তুর কৌণিক ত্বরণ হয়। যে রাশিটি কৌণিক ত্বরণের জন্য দায়ী সেটি হচ্ছে বলের ভ্রামক বা

টর্ক। বলের মতো টর্কও একটি ভেক্টর রাশি। এর দিক হয় বল এবং বস্তু ও ঘূর্ণন কেন্দ্র বা অক্ষের সংযোজক সরল রেখা মিলে যে সমতল তৈরি হয় তার অভিলম্ব বরাবর। আমরা চতুর্থ অধ্যায়ে এ সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করবো।

**কৌণিক ভরবেগ :** কোনো বস্তুর ভর ও বেগ অর্থাৎ রৈখিক বেগের গুণফলকে ভরবেগ তথা রৈখিক ভরবেগ বলে। ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে অনুরূপ রাশি হচ্ছে কৌণিক ভরবেগ। এটিও একটি ভেক্টর রাশি। এর দিক হয় ভরবেগ এবং বস্তু ও ঘূর্ণন কেন্দ্র বা অক্ষের সংযোজক সরল রেখা মিলে যে সমতল হয় তার অভিলম্ব বরাবর। আমরা চতুর্থ অধ্যায়ে এ সম্পর্কেও বিস্তারিত আলোচনা করবো।

## ২.৩। ভেক্টর রাশির প্রকাশ
## Representation of Vectors

জ্যামিতিক উপায়ে কোনো ভেক্টরকে একটি তীর চিহ্নিত সরলরেখা দ্বারা নির্দেশ করা হয়। সরলরেখাটির দৈর্ঘ্য রাশিটির মান ও তীর চিহ্ন এর দিক নির্দেশ করে। চিত্র ২.১-এ তীর চিহ্নিত $OP$ সরলরেখা একটি ভেক্টর রাশি নির্দেশ করছে। $OP$ রেখার দৈর্ঘ্য ও তীর চিহ্ন যথাক্রমে রাশিটির মান ও দিক নির্দেশ করে। এ ভেক্টরটির দিক $O$ বিন্দু থেকে $P$ বিন্দুর দিকে। যে তীর চিহ্নিত সরল রেখা দিয়ে ভেক্টর নির্দেশ করা হয়, সেটি যে বিন্দু থেকে আঁকা হয় তাকে ঐ ভেক্টরের পাদবিন্দু আর যে বিন্দুতে গিয়ে সরল রেখাটি শেষ হয় তাকে ঐ ভেক্টরের **শীর্ষবিন্দু** বলা হয়।



চিত্র : ২.১

২.১ চিত্রে $OP$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{OP}$ দিয়ে এবং ভেক্টরের মান $OP$ বা, $|\overrightarrow{OP}|$ দিয়ে নির্দেশ করা হয়। $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরের $O$ বিন্দুকে পাদবিন্দু বা সূচনা বিন্দু বা প্রারম্ভিক বিন্দু বা আদি বিন্দু এবং $P$ বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বা প্রান্তিক বিন্দু বলে।

হাতে লেখার সময় একটি ভেক্টর রাশির সংকেতকে নিচের তিনটি উপায়ের যেকোনো একটি দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

ক. রাশিটির সংকেতের উপর তীর চিহ্ন দিয়ে যেমন, $\overrightarrow{A}$

খ. রাশিটির সংকেতের উপর রেখা চিহ্ন দিয়ে যেমন, $\overline{A}$

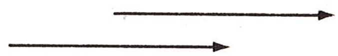
গ. রাশিটির সংকেতের নিচে রেখা চিহ্ন দিয়ে যেমন, $\underline{A}$

ছাপার ক্ষেত্রে সাধারণত মোটা হরফের **A** দিয়ে ভেক্টর রাশি এবং সরু হরফের $A$ বা, $|\mathbf{A}|$ দিয়ে ভেক্টর রাশিটির মান প্রকাশ করা হয়। অনেক বই-এ ছাপার ক্ষেত্রেও অক্ষরের উপরে তীর চিহ্ন দিয়ে ভেক্টর রাশি প্রকাশ করা হয়ে থাকে।

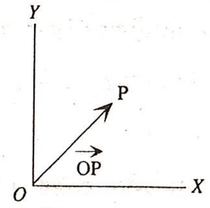
**এই বই-এ ভেক্টর রাশিকে অক্ষরের উপর তীর চিহ্ন দিয়ে এবং ভেক্টর রাশির মানকে সরু হরফ বা অক্ষর দিয়ে প্রকাশ করা হয়েছে।** যেমন, $\overrightarrow{A}$ একটি ভেক্টর যার মান $A$ বা $|\overrightarrow{A}|$

## ২.৪। কতিপয় ভেক্টর
## Few Vectors

১। **স্বাধীন ভেক্টর ( Free Vector ) :** কোনো ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু কোথায় হবে তা যদি ইচ্ছেমতো পছন্দ করা যায়, তবে সেই ভেক্টরকে স্বাধীন ভেক্টর বলে। যেমন 5 N মানের পূর্বমুখী একটি বল একটি ভেক্টর রাশি। একে প্রকাশ করলে এটি একটি স্বাধীন ভেক্টর হবে। কেননা নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের পূর্ব পশ্চিম বরাবর একটি সরল রেখা অঙ্কন করে পূর্বদিকে তীর চিহ্ন দিলেই এই ভেক্টর বোঝাবে। ২.২ চিত্রে অঙ্কিত ভেক্টর দুটির মান সমান ও দিক একই, কিন্তু তাদের পাদবিন্দু ভিন্ন জায়গায়। সুতরাং উল্লেখিত ভেক্টরটি একটি স্বাধীন ভেক্টর। যেহেতু স্বাধীন ভেক্টর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে বা কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে ক্রিয়া করে না, সুতরাং তার পাদবিন্দু ইচ্ছেমতো পছন্দ করা যায়।

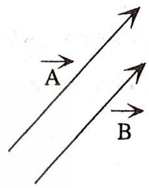

চিত্র : ২.২

২। **সীমাবদ্ধ ভেক্টর ( Localized Vector ) :** কোনো ভেক্টরের পাদবিন্দু যদি ইচ্ছেমতো পছন্দ করতে দেওয়া না হয় অর্থাৎ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুকে যদি পাদবিন্দু হিসেবে ঠিক করে রাখা হয় তাহলে সেই ভেক্টরকে সীমাবদ্ধ ভেক্টর বলে। কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে বা নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে ক্রিয়াশীল ভেক্টর একটি সীমাবদ্ধ ভেক্টর। যেমন অবস্থান ভেক্টর একটি সীমাবদ্ধ ভেক্টর, কেননা এটি সব সময় প্রসঙ্গ কাঠামোর মূলবিন্দু থেকে আঁকতে হয় (চিত্র : ২.৩)। কোনো লন রোলারকে টানা হচ্ছে। এ টানা বলকে ভেক্টররূপে চিত্রে নির্দেশ করতে হলে এটিকে হাতলের নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে আঁকতে হবে। এ অঙ্কিত ভেক্টরটি একটি সীমাবদ্ধ ভেক্টর।



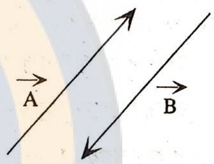
চিত্র : ২·৩

৩। **সদৃশ ভেক্টর (Like Vectors) :** সমজাতীয় দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি একই দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে সদৃশ বা সমান্তরাল ভেক্টর বলে। ২.৪ চিত্রে $\overrightarrow{A}$ ও $\overrightarrow{B}$ সদৃশ ভেক্টর।



চিত্র : ২·৪

৪। **বিসদৃশ ভেক্টর (Unlike Vectors) :** সমজাতীয় দুটি ভেক্টর যদি বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে বিসদৃশ ভেক্টর বলে। ২·৫ চিত্রে $\overrightarrow{A}$ ও $\overrightarrow{B}$ বিসদৃশ ভেক্টর।

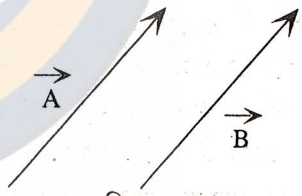


চিত্র : ২·৫

৫। **সমান ভেক্টর (Equal Vectors) :** সমজাতীয় দুটি ভেক্টরের মান যদি সমান হয় আর তাদের দিক যদি একই দিকে হয় তবে তাদেরকে সমান ভেক্টর বলে।

চিত্র ২·৬-এ $\overrightarrow{A}$ ও $\overrightarrow{B}$ ভেক্টর দুটি সমান অর্থাৎ $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$

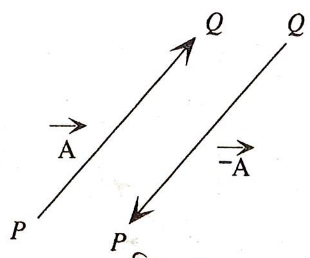
দুটি ভেক্টরের সমতা ভেক্টরদ্বয়ের পাদবিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে না। পাদবিন্দু যেখানেই থাকুক না কেন যদি ভেক্টরদ্বয়ের মান সমান এবং দিক একই দিকে হয়, তাহলেই তারা সমান ভেক্টর হবে। একই দিকে নির্দেশিত সমান দৈর্ঘ্যের দুটি সমান্তরাল রেখা দিয়ে দুটি সমান ভেক্টর বোঝানো হয়।



চিত্র : ২·৬

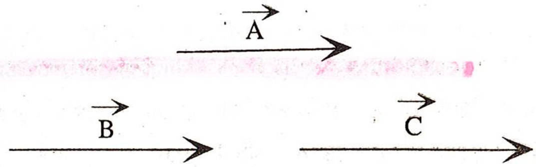
৬. **ঋণাত্মক বা বিপরীত ভেক্টর (Negative Vector) :** নির্দিষ্ট দিক বরাবর কোনো ভেক্টরকে ধনাত্মক ধরলে তার বিপরীত দিকে সমমানের সমজাতীয় ভেক্টরকে ঋণাত্মক ভেক্টর বা বিপরীত ভেক্টর বলে।

চিত্র ২·৭-এ $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{A}$ এবং $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{A}$



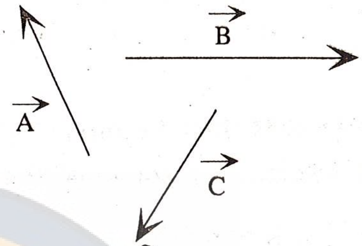
চিত্র : ২·৭

**৭. সমরেখ ভেক্টর (Collinear Vectors) :** দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি একই সরলরেখা বরাবর বা পরস্পর সমান্তরালে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে সমরেখ ভেক্টর বলে। চিত্র : ২·৮-এ $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ প্রভৃতি সমরেখ ভেক্টর।




চিত্র : ২·৮

**৮. সমতলীয় ভেক্টর (Coplaner Vectors) :** দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি একই সমতলে অবস্থিত হয় তবে তাদেরকে সমতলীয় ভেক্টর বলে। চিত্র ২·৯-এ $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ প্রভৃতি সমতলীয় ভেক্টর।




চিত্র : ২·৯

**৯. সঠিক ভেক্টর (Proper Vectors) :** যে সকল ভেক্টরের মান শূন্য নয় তাদেরকে সঠিক ভেক্টর বলে।

**১০. নাল ভেক্টর বা শূন্য ভেক্টর (Null Vector) :** যে ভেক্টরের মান শূন্য তাকে নাল ভেক্টর বা শূন্য ভেক্টর বলে।

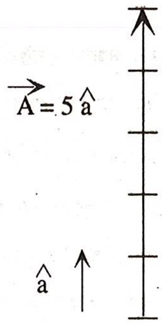
একটি ভেক্টরের সাথে তার বিপরীত ভেক্টর যোগ করে বা দুটি সমান ভেক্টর বিয়োগ করে নাল ভেক্টর পাওয়া যায়। নাল ভেক্টরের পাদবিন্দু ও শীর্ষবিন্দু একই বিন্দুতে হয়।

নাল ভেক্টরের কোনো সুনির্দিষ্ট দিক নেই। নাল ভেক্টরকে সাধারণত $\vec{0}$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

**১১. একক ভেক্টর (Unit Vector) :** কোনো ভেক্টরের মান যদি একক হয় তাহলে তাকে একক ভেক্টর বলে।

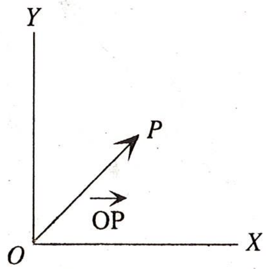
কোনো ভেক্টরের মান যদি শূন্য না হয় তাহলে সেই ভেক্টরকে তার মান দিয়ে ভাগ করলে ভেক্টরটির দিকে একটি একক ভেক্টর পাওয়া যায়।

ধরা যাক, $\vec{A}$ একটি ভেক্টর যার সংখ্যাগত মান $A \neq 0$, তাহলে $\frac{\vec{A}}{A} = \vec{a}$ একটি একক ভেক্টর। $\vec{a}$ ভেক্টরের মান একক এবং দিক $\vec{A}$ এর দিকে। ভেক্টরের আলোচনায় একক ভেক্টরের গুরুত্ব অপরিসীম বিধায় অনেক সময় একক ভেক্টরের আলাদা সংকেত ব্যবহার করা হয় এবং তা হচ্ছে অক্ষরের উপরে তীর চিহ্নের পরিবর্তে টুপি (cap) বা হ্যাট (hat) চিহ্ন (^), যেমন $\hat{a}$ বা, $\hat{i}$। চিত্র ২·১০-এ $\vec{A} = 5\,\hat{a}$




চিত্র : ২·১০

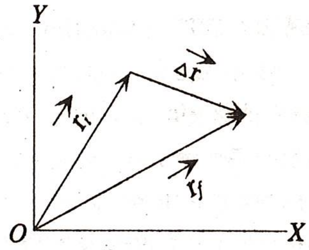
**১২. অবস্থান ভেক্টর (Position Vector) :** প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দিয়ে নির্দেশ করা হয় তাকে ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলে।




চিত্র : ২·১১

চিত্র ২·১১-এ $O$ হচ্ছে প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দু এবং $P$ যে কোনো একটি বিন্দু। $\vec{OP}$ ভেক্টরটি $O$ বিন্দুর সাপেক্ষে $P$ বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করছে। এখানে $\vec{OP}$ একটি অবস্থান ভেক্টর।

অবস্থান ভেক্টরকে অনেক সময় **ব্যাসার্ধ ভেক্টর** (radius vector) বলা হয় এবং $\vec{r}$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়। সুতরাং $\vec{OP} = \vec{r}$



চিত্র : ২.১২

**১৩. সরণ ভেক্টর :** কোনো বস্তুর অবস্থান ভেক্টরের পরিবর্তনকে সরণ ভেক্টর বলে। কোনো বস্তুর শেষ অবস্থান ভেক্টর $\vec{r_f}$ এবং আদি অবস্থান ভেক্টর $\vec{r_i}$ এর পার্থক্যই হচ্ছে সরণ ভেক্টর $\Delta \vec{r}$ (চিত্র ২.১২)।

$$\therefore \Delta \vec{r} = \vec{r_f} - \vec{r_i}$$

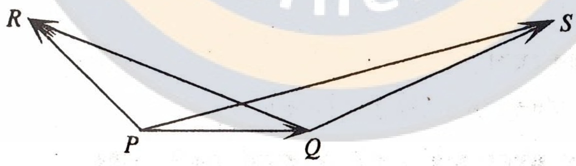
**১৪. বিপ্রতীপ বা ব্যতিহার ভেক্টর (Reciprocal Vector) :** সমজাতীয় দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের একটির মান যদি অপরটির বিপরীত সংখ্যা হয়, তবে তাদেরকে বিপ্রতীপ বা ব্যতিহার ভেক্টর বলে। যেমন—

$\vec{A} = 7\hat{i}$ এবং $\vec{B} = \frac{1}{7}\hat{i}$ হলে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর বিপ্রতীপ ভেক্টর।

## ২.৫। ভেক্টর বীজগণিত : ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ
## Vector Algebra : Addition and Subtraction of Vectors

দুই বা ততোধিক এক জাতীয় ভেক্টর রাশি যোগ করলে একটি নতুন ভেক্টর রাশি পাওয়া যায়। যোগের জন্য ভেক্টর রাশি দুটি অবশ্যই একই জাতীয় হতে হবে। বেগ, ত্বরণ ইত্যাদি ভেক্টর রাশি। বেগের সাথে বেগ কিংবা ত্বরণের সাথে ত্বরণের যোগ সম্ভব। কিন্তু বেগের সাথে ত্বরণের যোগ সম্ভব নয়। এ কথাটি অবশ্য স্কেলার রাশির ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য। যেমন তাপমাত্রার সাথে তাপের যোগ সম্ভব নয়।

দুটি স্কেলার রাশির যোগ সাধারণ বীজগণিতের সূত্রানুসারে করা যায়, যেমন $3 + 4 = 7$। কিন্তু দুটি ভেক্টর রাশির যোগফল এভাবে বের করা যায় না, কেননা দুটি ভেক্টর রাশির যোগফল শুধু রাশিগুলোর মানের উপর নির্ভর করে না, তাদের প্রত্যেকের দিক তথা মধ্যবর্তী কোণের উপরও নির্ভর করে। ধরা যাক, একটি কণা $P$ থেকে 3 m সরে $Q$-তে গেল (চিত্র : ২·১৩)। এরপর $QR$ বরাবর সেটি 4 m দূরত্ব অতিক্রম করে। তাহলে কণাটির সরণ হলো $PR$। আর কণাটি যদি $PQ$-এর পর $QR$ বরাবর না গিয়ে $QS$ বরাবর 4 m দূরত্ব অতিক্রম করে, তাহলে এর সরণ হবে $PS$।



চিত্র : ২·১৩

উপরের চিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে $PR$ এবং $PS$ সমান নয়, অর্থাৎ এখানে রাশি দুটির মানের সাথে দিক জড়িত থাকায় তাদের যোগ সাধারণ গাণিতিক নিয়মে 3 m + 4 m = 7 m হলো না। দুটি ভেক্টর রাশির মান যদি 3 m এবং 4 m হয় তবে তাদের মধ্যবর্তী কোণের উপর নির্ভর করে যোগফলের মান 1m থেকে 7m পর্যন্ত যে কোনো সংখ্যা হতে পারে। কাজেই ভেক্টর রাশির যোগ সাধারণ বীজগাণিতিক নিয়মে করা যায় না, তা জ্যামিতিক উপায়ে করতে হয়। ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ, গুণ ইত্যাদি সংবলিত গণিতের শাখাকে ভেক্টর বীজগণিত বলা হয়। গণিতের এ শাখায় ভেক্টর রাশিসমূহের যোগ, বিয়োগ, গুণ প্রভৃতির বিভিন্ন সূত্র ও নিয়ম-কানুন আলোচনা করা হয়।

## ভেক্টরের যোগ (Addition of Vectors)

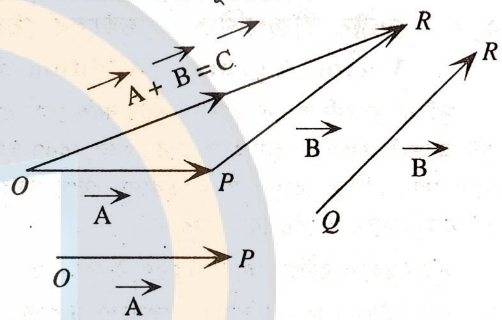
দুই বা ততোধিক একজাতীয় ভেক্টর যোগ করলে একটি নতুন ভেক্টর পাওয়া যায়। এ নতুন ভেক্টরটিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশির **লব্ধি** (resultant) বলে। আর যে ভেক্টরগুলো যোগ করে লব্ধি ভেক্টর পাওয়া যায় তাদের প্রত্যেকটি হলো লব্ধি ভেক্টরের **উপাংশ** (component)। যোগের জন্য ভেক্টর রাশিগুলো অবশ্যই একই জাতীয় হতে হবে এবং কোনো বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়া করতে হবে। বেগ, বল ইত্যাদি ভেক্টর রাশি। বেগের সাথে বেগ কিংবা বলের সাথে বলের যোগ সম্ভব। কিন্তু বেগের সাথে বলের যোগ সম্ভব নয়।

### দুটি ভেক্টরের যোগ

নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে দুটি ভেক্টরের যোগফল বা লব্ধি পাওয়া যায়।

**দুটি ভেক্টরের যোগের ক্ষেত্রে একটি ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুতে অপর ভেক্টরের পাদবিন্দু স্থাপন করে প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু সরলরেখা দিয়ে যোগ করলে সরলরেখাটির দৈর্ঘ্য ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির মান নির্দেশ করে। লব্ধির দিক হয় প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুর দিকে।**

ধরা যাক, দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর লব্ধি $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ বের করতে হবে। লব্ধি বের করার জন্য $\vec{A}$ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু অর্থাৎ $P$-তে দিক পরিবর্তন না করে $\vec{B}$ ভেক্টরের পাদবিন্দু অর্থাৎ $Q$ স্থাপন করে $PR$ অঙ্কন করা হয় (চিত্র : ২.১৪)। তারপর $\vec{A}$ ভেক্টরের পাদবিন্দু $O$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু $R$ যোগ করে যে সরলরেখা $OR$ পাওয়া যায় তার দৈর্ঘ্যই হচ্ছে $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর লব্ধি তথা যোগফলের মান, আর দিক হবে $O$-থেকে $R$-এর দিকে। অর্থাৎ



চিত্র : ২.১৪

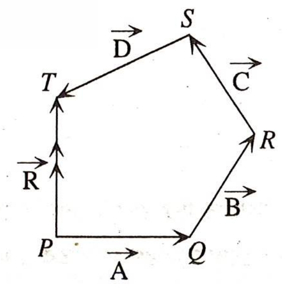
$$\vec{OP} + \vec{PR} = \vec{OR}$$

$$\text{বা, } \vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

### দুই-এর অধিক ভেক্টরের যোগ

নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে দুই-এর অধিক সংখ্যক ভেক্টরের যোগ করা হয়।

**অনেকগুলো ভেক্টর যোগ করতে হলে প্রথমে যেকোনো একটি ভেক্টর আঁকতে হবে। তারপর ক্রমান্বয়ে অন্য ভেক্টরগুলো এমনভাবে স্থাপন করতে হবে যাতে করে একটি ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুর উপর অন্য ভেক্টরের পাদবিন্দু থাকে। এরপর প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু এবং শেষ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু যোগ করে যে সরলরেখা পাওয়া যায় তার দৈর্ঘ্য ভেক্টরগুলোর লব্ধির মান নির্দেশ করে। লব্ধির দিক হবে প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু থেকে শেষ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুর দিকে।**



চিত্র : ২.১৫

২.১৫ চিত্রে $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ এবং $\vec{D}$ চারটি ভেক্টরের যোগফল হবে $\vec{PT}$ $(=\vec{R})$ ভেক্টর।

## ভেক্টরের বিয়োগ (Subtraction of Vectors)

ভেক্টর বিয়োগের ক্ষেত্রে যে ভেক্টরকে বিয়োগ করতে হবে তার ঋণাত্মক ভেক্টরকে অপর ভেক্টরের সাথে যোগ করলেই বিয়োগফল পাওয়া যায়।

$\vec{A}$ ভেক্টর থেকে $\vec{B}$ ভেক্টর বিয়োগ করলে যদি বিয়োগফল $\vec{C}$ ভেক্টর হয়, তাহলে

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে $\vec{A}$ ভেক্টরের সাথে $-\vec{B}$ ভেক্টর যোগ করলেই $\vec{A} - \vec{B}$ অর্থাৎ $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর বিয়োগফল পাওয়া যায়।

নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে একটি ভেক্টর থেকে অপর ভেক্টরকে বিয়োগ করা হয়।

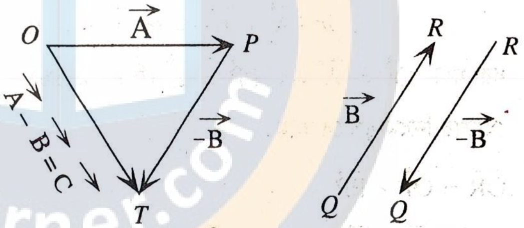
**দুটি ভেক্টরের বিয়োগের ক্ষেত্রে প্রথম ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুতে যে ভেক্টরটি বিয়োগ করতে হবে তার ঋণাত্মক ভেক্টরের পাদবিন্দু স্থাপন করে প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু থেকে ঋণাত্মক ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু যোগ করলে যে সরলরেখা পাওয়া যায় তার দৈর্ঘ্য ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগ ফলের মান নির্দেশ করে। বিয়োগফলের দিক হয় প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু থেকে ঋণাত্মক ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুর দিকে।**

২·১৬ চিত্রে $\vec{A} = \vec{OP}$ এবং $\vec{B} = \vec{QR}$। আমাদেরকে $\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$ নির্ণয় করতে হবে। যেহেতু নির্দিষ্ট দিক বরাবর কোনো ভেক্টরকে ধনাত্মক ধরলে ঠিক তার বিপরীত দিকে সমমানের ভেক্টরকে ঋণাত্মক ভেক্টর বলা হয়; সুতরাং চিত্র ২·১৬-এ $\vec{QR} = \vec{B}$ এবং $\vec{RQ} = -\vec{B}$। $\vec{C}$ ভেক্টর নির্ণয়ের জন্য $\vec{A}$ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু অর্থাৎ $P$-তে দিক পরিবর্তন না করে $-\vec{B}$ ভেক্টরের পাদবিন্দু অর্থাৎ $R$ স্থাপন করে $PT$ অঙ্কন করা হয় (চিত্র : ২·১৬)। এখন $OT$ যোগ করা হলে,

$\vec{OP} + \vec{PT} = \vec{OT}$

বা, $\vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{C}$

বা, $\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$



চিত্র : ২·১৬

যেহেতু ভেক্টরের বিয়োগ এক প্রকার যোগ ছাড়া আলাদা কিছুই নয়, কাজেই যে সকল ভেক্টরকে বিয়োগ করতে হবে তাদের ঋণাত্মক ভেক্টর নিয়ে যোগ করলেই বিয়োগফল পাওয়া যায়।

## ভেক্টর বীজগণিতের কতিপয় সূত্র (Some Laws of Vector Algebra)

### ১. বিনিময় সূত্র (Commutative Law) : $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

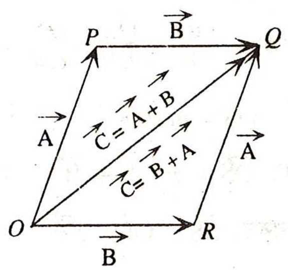
ধরা যাক, $\vec{OP} = \vec{A}$ এবং $\vec{OR} = \vec{B}$ দুটি ভেক্টর $O$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে (চিত্র : ২.১৭)। $OPQR$ সামান্তরিক পূর্ণ করে আমরা পাই,

$\vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OQ}$

এবং $\vec{OR} + \vec{RQ} = \vec{OQ}$

$\therefore \vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OR} + \vec{RQ}$

বা, $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$



চিত্র : ২·১৭

সুতরাং ভেক্টর যোগ বিনিময় সূত্র মেনে চলে।

### ২. সংযোগ সূত্র (Associative Law)

$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

ধরা যাক, $\vec{OP} = \vec{A}, \vec{PQ} = \vec{B}$ এবং $\vec{QR} = \vec{C}$ (চিত্র : ২.১৮)।

এখন $\vec{OP}$ এবং $\vec{PQ}$ যোগ করে আমরা পাই,

$\vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OQ} = (\vec{A} + \vec{B})$

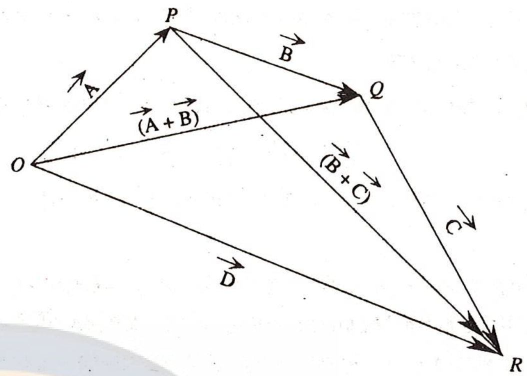
এবং $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR} = (\vec{B} + \vec{C})$

এখন, $\vec{OQ} + \vec{QR} = \vec{OR}$

অর্থাৎ $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{D}$

আবার, $\vec{OP} + \vec{PR} = \vec{OR}$

অর্থাৎ $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{D}$




চিত্র : ২.১৮

$\therefore (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

সুতরাং ভেক্টর যোগ সংযোগ সূত্র মেনে চলে।

অতএব, দেখা যায় যে বহুসংখ্যক ভেক্টরের যোগফল অর্থাৎ লব্ধি তাদের যোগের ক্রমের উপর নির্ভর করে না।

### ৩. বণ্টনসূত্র (Distributive Law)

$$m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$$

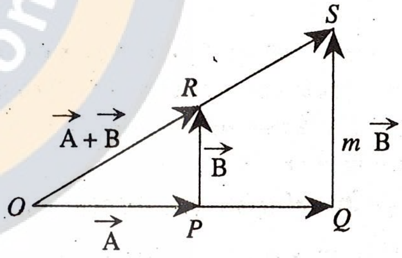
ধরা যাক, $\vec{OP} = \vec{A}$ এবং $\vec{PR} = \vec{B}$ (চিত্র : ২.১৯)

যোগের নিয়মানুসারে আমরা পাই,

$\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{PR}$

$= \vec{A} + \vec{B}$

এখন ধরা যাক, $OP$ এবং $OR$ এর বর্ধিতাংশের উপর $Q$ এবং $S$ দুটি বিন্দু নেয়া হয় যাতে




চিত্র : ২.১৯

$\vec{OQ} = m.\vec{OP} = m\vec{A}$

এবং $\vec{QS} = m.\vec{PR} = m\vec{B}$ হয়।

সুতরাং $\frac{OQ}{OP} = \frac{QS}{PR} = \frac{OS}{OR} = m$

$\therefore \vec{OS} = m.\vec{OR}$

বা, $\vec{OS} = m(\vec{A} + \vec{B}) \quad [\because \vec{OR} = \vec{A} + \vec{B}]$

আবার, $\vec{OS} = \vec{OQ} + \vec{QS}$

$= m\vec{A} + m\vec{B}$

$\therefore m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$

## সামান্তরিকের সূত্র (Law of Parallelogram)

**নিজে কর :** টেবিলের উপর একটি বই বা কোনো বস্তু রেখে ডান হাত দিয়ে সেটিকে যেকোনো দিকে ঠেলো। যে দিকে ঠেলা হচ্ছে বস্তুটি সে দিকে যাচ্ছে। এবার বাম হাত দিয়ে অন্য দিকে ঠেলো। বস্তুটি ঠেলার দিকেই যাচ্ছে। এখন একই সাথে বস্তুটিকে ডান হাত ও বাম হাত দিয়ে দুটি ভিন্ন দিকে ঠেলো। কী দেখতে পেলে?

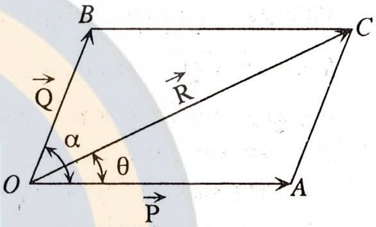
বস্তুটি ডান হাতের বা বাম হাতের ঠেলার দিকে না গিয়ে মাঝামাঝি কোনো একদিকে যাচ্ছে। এর কারণ দুই হাতের প্রযুক্ত বল বস্তুটির উপর ক্রিয়া করে একটি লব্ধি বল সৃষ্টি করেছে এবং বস্তুটি লব্ধি বলের ক্রিয়ায় লব্ধি বরাবর যাচ্ছে। একই জাতীয় দুটি ভেক্টর কোনো বিন্দুতে একই সময় ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধির মান ও দিক সামান্তরিকের সূত্র থেকে পাওয়া যায়।

**সামান্তরিকের সূত্র : যদি একটি সামান্তরিকের কোনো কৌণিক বিন্দু থেকে অঙ্কিত দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা কোনো কণার উপর এককালীন ক্রিয়াশীল একই জাতীয় দুটি ভেক্টরের মান ও দিক নির্দেশ করা যায়, তাহলে ঐ বিন্দু থেকে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণটি ভেক্টর দুটির মিলিত ফলের বা লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।**

২.২০ চিত্রে $O$ বিন্দুতে $\vec{OA} = \vec{P}$ এবং $\vec{OB} = \vec{Q}$ দুটি ভেক্টর $\alpha$ কোণে ক্রিয়া করছে। $OA$ এবং $OB$-কে সন্নিহিত বাহু ধরে $OACB$ সামান্তরিকটি অঙ্কন করা হয়েছে। এ সূত্রানুসারে উভয় ভেক্টরের ক্রিয়া বিন্দু অর্থাৎ $O$ থেকে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণ $OC$ ই $OA$ এবং $OB$ এর লব্ধি নির্দেশ করে।

অর্থাৎ $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$

বা, $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$



চিত্র : ২·২০

### লব্ধির মান নির্ণয়

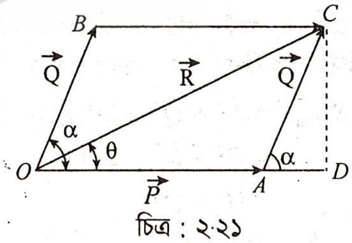
ধরা যাক, কোনো কণার উপর একই সময়ে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর $\alpha$ কোণে ক্রিয়া করে (চিত্র : ২·২১)। $\vec{OA}$ ও $\vec{OB}$ যথাক্রমে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটির মান ও দিক নির্দেশ করছে এবং $\angle BOA = \alpha$। এখন $OACB$ সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ করলে $OC$ কর্ণ $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করবে।

$C$ বিন্দু থেকে $OA$-এর বর্ধিত অংশের উপর $CD$ লম্ব টানা হলো। ধরা যাক, সেটি $OA$ বাহুর বর্ধিতাংশকে $D$ বিন্দুতে ছেদ করে। অতএব $\angle CAD = \alpha$। এখন $ODC$ সমকোণী ত্রিভুজে

$OC^2 = OD^2 + CD^2$

বা, $OC^2 = (OA + AD)^2 + CD^2$ ;

কিন্তু $ADC$ সমকোণী ত্রিভুজ বিবেচনা করে ত্রিকোণমিতি থেকে আমরা পাই,



চিত্র : ২·২১

$\sin\alpha = \dfrac{CD}{AC}$ বা, $CD = AC\sin\alpha$

$\therefore\ CD = Q\sin\alpha \quad (\because AC = OB = Q)$

এবং $\cos\alpha = \dfrac{AD}{AC}$ বা, $AD = AC\cos\alpha$

$\therefore\ AD = Q\cos\alpha$ এবং $OA = P$

সুতরাং $OC^2 = (P + Q\cos\alpha)^2 + (Q\sin\alpha)^2$

$= P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2\cos^2\alpha + Q^2\sin^2\alpha$

$= P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$

$= P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha \quad (\because \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1)$

$OC$-কে $R$ দ্বারা সূচিত করলে,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$$

$$\therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.1)$$

### লব্ধির দিক নির্ণয়

লব্ধি $R$ যদি $P$-এর সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে, তবে $ODC$ সমকোণী ত্রিভুজ থেকে

$$\tan\theta = \frac{CD}{OD} = \frac{CD}{OA + AD}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.2)$$

(2.1) ও (2.2) সমীকরণ থেকে যথাক্রমে $R$ ও $\theta$-এর মান পাওয়া যায়।[1]

### লব্ধির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান

দুটি ভেক্টর $P$ ও $Q$ কোনো বিন্দুতে $\alpha$ কোণে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধির মান,

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.1)$$

$P$ ও $Q$-এর মান নির্দিষ্ট থাকলে তাদের লব্ধির মান $\cos\alpha$ তথা ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\alpha$-এর উপর নির্ভর করে।

(2.1) সমীকরণ থেকে দেখা যায়, $\cos\alpha$-এর মান সর্বোচ্চ হলে $R$-এর মান সর্বোচ্চ হয়। আমরা জানি, $\cos\alpha$ এর সর্বোচ্চ মান হতে পারে $+1$। সুতরাং লব্ধির মান সর্বোচ্চ হয় যখন $\cos\alpha = 1$ হয় বা, $\alpha = 0^\circ$ হয়।

অতএব, ভেক্টর দুটির লব্ধির মান সর্বোচ্চ হয় যখন ভেক্টর দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $0^\circ$ হয় অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় একই দিকে ক্রিয়া করে। লব্ধির সর্বোচ্চ মান $R_{max}$ হলে,

$$\begin{aligned} R^2_{max} &= P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 0^\circ \\ &= P^2 + Q^2 + 2PQ \\ &= (P + Q)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore R_{max} = P + Q$$

**অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির সর্বোচ্চ মান ভেক্টরদ্বয়ের মানের যোগফলের সমান।**

আবার, (2.1) সমীকরণ থেকে দেখা যায়, $\cos\alpha$ এর মান সর্বনিম্ন হলে $R$-এর মান সর্বনিম্ন হয়। আমরা জানি, $\cos\alpha$ এর সর্বনিম্ন মান হতে পারে $-1$। সুতরাং লব্ধির সর্বনিম্ন মান হয় যখন $\cos\alpha = -1$ হয় বা, $\alpha = 180^\circ$ হয়।

অতএব, ভেক্টর দুটির লব্ধির মান সর্বনিম্ন হয় যখন ভেক্টর দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $180^\circ$ হয় অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে। লব্ধির সর্বনিম্ন মান $R_{min}$ হলে,

$$\begin{aligned} R^2_{min} &= P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 180^\circ \\ &= P^2 + Q^2 - 2PQ \\ &= (P \sim Q)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore R_{min} = P \sim Q$$

**অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির সর্বনিম্ন মান ভেক্টরদ্বয়ের মানের বিয়োগফলের সমান।**

---

[1]অনুরূপভাবে দেখানো যায় $R$ যদি $Q$-এর সাথে $\beta$ কোণ উৎপন্ন করে তবে

$$\tan\beta = \frac{P\sin\alpha}{Q + P\cos\alpha}$$

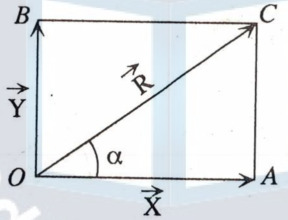
সুতরাং দুটি ভেক্টর একই দিকে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধির মান সর্বোচ্চ হয় এবং এ মান ভেক্টরদ্বয়ের মানের যোগফলের সমান ; আর দুটি ভেক্টর পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধির মান সর্বনিম্ন হয় এবং এ মান ভেক্টরদ্বয়ের মানের বিয়োগফলের সমান।

## ২.৬। ভেক্টরের বিভাজন
### Resolution of Vectors

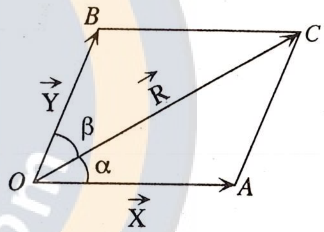
আমরা পূর্বের অনুচ্ছেদে দেখেছি একাধিক ভেক্টর যোগ করে একটি ভেক্টর পাওয়া যায়। কাজেই একটি ভেক্টর রাশিকেও দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করা সম্ভব। **একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করার পদ্ধতিকে ভেক্টরের বিভাজন বলে এবং বিভক্ত অংশগুলোকে মূল ভেক্টরের উপাংশ বলে।**

**লম্ব উপাংশ :**

একটি ভেক্টরকে যেকোনো দুই দিকে বিভক্ত করা যায়। এখন একটি ভেক্টরকে যদি এমনভাবে দুটি উপাংশে বিভক্ত করা হয় যে, উপাংশ দুটি পরস্পর সমকোণে থাকে, অর্থাৎ পরস্পর লম্ব হয়, তবে তাদেরকে লম্ব উপাংশ বা লম্বাংশ বলে। চিত্র ২.২২ক-তে একটি ভেক্টর $\vec{R}$ কে দুটি লম্ব উপাংশ $\vec{X}$ ও $\vec{Y}$ তে বিভক্ত করা হয়েছে। ভেক্টর $\vec{R}$ কে $\alpha$ কোণে একটি উপাংশ $\vec{OA} = \vec{X}$-এ বিভক্ত করা হয়েছে। অপর উপাংশ $\vec{OB} = \vec{Y}$ হচ্ছে $\vec{X}$ এর সাথে সমকোণে অর্থাৎ লম্ব বরাবর।



চিত্র : ২.২২(ক)



চিত্র : ২.২২ (খ)

এখন $OAC$ ত্রিভুজে,

$OC = R,$

$OA = X$

এবং $AC = OB = Y$

এ ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই,

$$\cos\alpha = \frac{OA}{OC}$$

$$\therefore OA = OC\cos\alpha$$

বা, $X = R\cos\alpha$

আবার, $\sin\alpha = \dfrac{AC}{OC}$

$$\therefore AC = OC\sin\alpha$$

বা, $Y = R\sin\alpha$

সুতরাং কোনো ভেক্টর $R$ কে যদি দুটি পরস্পর লম্ব উপাংশে বিভাজিত করা হয় তাহলে $R$ এর সাথে $\alpha$ কোণে উপাংশ $X$ এবং $X$ এর সাথে সমকোণে উপাংশ $Y$ হবে;

$$X = R\cos\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.3)$$

$$Y = R\sin\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.4)$$

**যে কোনো দুই দিকে উপাংশ :**

ধরা যাক, উপাংশ দুটি পরস্পর লম্ব নয়। $\vec{R}$ এর সাথে $\alpha$ কোণে উপাংশ $\vec{X}$ এবং $\vec{R}$ এর সাথে $\beta$ কোণে উপাংশ $\vec{Y}$। তাহলে (চিত্র : ২.২২খ) থেকে দেখা যায়,

$$X = \frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.5a)$$

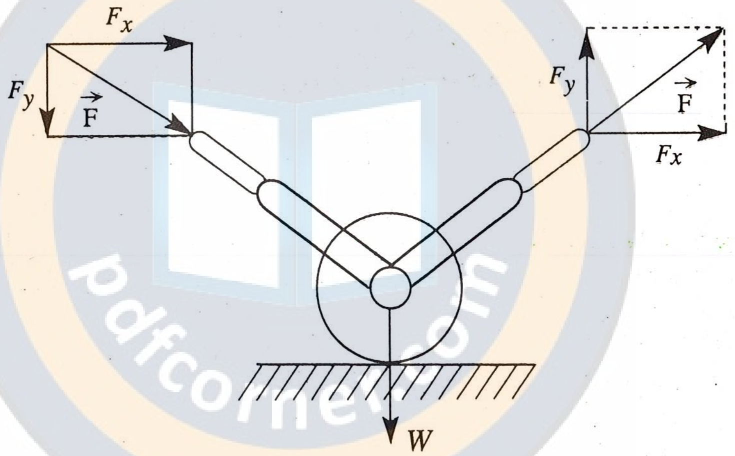
$$Y = \frac{R \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2.5b)$$

**নিজে কর :**
একটি ট্রলি ব্যাগ বা স্যুটকেস (চাকাযুক্ত এবং হাতল বের করে লম্বা করা যায় এমন ব্যাগ বা স্যুটকেস) নাও। হাতল বের করে লম্বা কর। এখন কোনো মেঝের উপর দিয়ে এটাকে একবার ঠেলে আরেকবার টেনে একস্থান থেকে অন্যস্থানে নাও। কী বুঝলে?

দেখা গেল ব্যাগ বা স্যুটকেসটিকে ঠেলার চেয়ে টানা সহজ। একই ব্যাপারে ঘটে লন রোলারের ক্ষেত্রে।

### লন রোলারকে ঠেলার চেয়ে টানা সহজ :

কোনো বস্তুকে যখন কোনো তলের উপর দিয়ে ঠেলা বা টানা হয় তখন তার গতির বিপরীত দিকে সব সময় একটি ঘর্ষণ বল কাজ করে- যা গতিকে বাধা দেয়। বস্তুর ওজন যত বেশি হয় একটি নির্দিষ্ট তলের উপর এ ঘর্ষণ বলও তত বেশি হয়। সুতরাং বস্তু যত হাল্‌কা হবে তাকে টানা বা ঠেলা তত সহজ হবে। নির্দিষ্ট ওজনের বস্তুকে টানা বা ঠেলা সহজ হবে যখন এর উপর ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ বলের মান কম হবে।




চিত্র ; ২·২৩

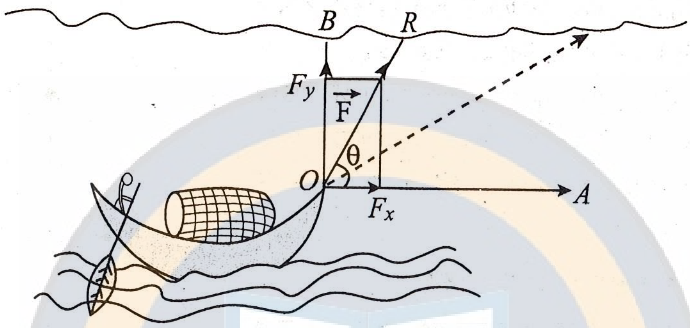
একটি লন রোলারকে ঠেলার চেয়ে টানা সহজ। বল বা ভেক্টর রাশির বিভাজন দ্বারা এর ব্যাখ্যা দেওয়া যায়। $W$ ওজনের একটি লন রোলারকে ঠেলার সময় হাতের সাহায্যে হাতলে $\vec{F}$ বল প্রয়োগ করা হয়। $\vec{F}$ বল, $F_x$ ও $F_y$ এ দুটি লম্ব উপাংশে যথাক্রমে অনুভূমিক ও খাড়া নিচের দিকে বিভাজিত হবে (চিত্র: ২·২৩)। $F_x$ বলটি ভূমির সমান্তরালে সামনের দিকে ক্রিয়া করে রোলারটিকে সামনের দিকে এগিয়ে নেবে। কিন্তু $F_y$ বলটি খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করায় রোলারটির আপাত ওজন হবে $(W + F_y)$। এতে ওজন কিছুটা বেড়ে যায় ফলে রোলারটির উপর ঘর্ষণ বলও বৃদ্ধি পায়। কাজেই এটি চলার পথে বেশি বাধা প্রাপ্ত হয়। কিন্তু টানার সময় $F_y$ বলটি খাড়া উপরের দিকে ক্রিয়া করে। ফলে রোলারটির আপাত ওজন হয় $(W - F_y)$। এতে রোলারটি কিছুটা হাল্কা হয় ফলে ঘর্ষণ বলও কম হয়। ফলে সামনের দিকে ক্রিয়ারত $F_x$ বলটি সহজে রোলারটিকে সামনে এগিয়ে নিতে পারে। সুতরাং বলা চলে লন রোলার ঠেলার চেয়ে টানা সহজ।

### দড়ি দিয়ে নৌকা টানা :

একখানা দড়ি দিয়ে তীর থেকে টেনে নৌকা সামনের দিকে এগিয়ে নেবার ঘটনাকেও ভেক্টর বিভাজনের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়। ধরা যাক, $OR$ পথে দড়ির টানের বল $\vec{F}$ ক্রিয়া করছে ( চিত্র : ২.২৪ )। ধরা যাক, বলটি নৌকার দৈর্ঘ্য তথা

নদীর দৈর্ঘ্যের সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করছে। এ বলকে দুটি লম্ব উপাংশে বিভাজিত করলে নৌকার দৈর্ঘ্য $OA$ বরাবর উপাংশ হবে $F_x = F\cos\theta$ । অন্য উপাংশ $OA$ এর লম্ব বরাবর $OB$ এর দিকে $F_y = F\sin\theta$। $F_x$ উপাংশটি নৌকাকে সামনের দিকে এগিয়ে নেয় আর $F_y$ উপাংশ নৌকাকে তীরের দিকে নিতে চায়। পানির বিপরীত প্রতিক্রিয়া ও হালের সাহায্যে $F_y$ কে প্রশমিত করা হয়। ফলে $F_x$ এর ক্রিয়ায় নৌকা সামনের দিকে এগিয়ে চলে।

চিত্র থেকে দেখা যায় দড়ি যত লম্বা হবে $\theta$ কোণ তত ছোট হবে , ফলে নৌকার দৈর্ঘ্য বরাবর বলের উপাংশ $F_x$ তত বড় হবে। ফলে কম টানা বলেও নৌকা চালনা সহজ হবে। এজন্য গুণ টানার জন্য অনেক লম্বা লম্বা দড়ি ব্যবহার করা হয়।




চিত্র : ২.২৪

### ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা রাখা হয় :

ট্রলিব্যাগকেও লন রোলার বা নৌকার মতো ঠেলার চেয়ে টানা সহজ। নৌকা টানার সময় গুণ বা দড়ি যত লম্বা হবে তার টানের অনুভূমিক উপাংশ তত বেশি হবে এবং নৌকাকে সামনে এগিয়ে নিয়ে যাওয়া তত সহজ হবে। একই ভাবে ট্রলিব্যাগের হাতল লম্বা হলে টানার সময় সেটি অনুভূমিকের সাথে কম কোণ উৎপন্ন করবে , ফলে টানের অনুভূমিক উপাংশ বেশি হবে এবং ট্রলিব্যাগকে স্থানান্তর সহজ হবে।

## ২.৭। ভেক্টরের ত্রিমাত্রিক উপাংশ ও ভেক্টর বীজগণিত
## Three Dimensional Components of a Vector and Vector Algebra

### আয়ত একক ভেক্টর (Rectangular Unit Vector)

কোনো বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করতে আমরা স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার সাহায্য নিই। কোনো সরলরেখার উপর কোনো বিন্দুর অবস্থান নির্দিষ্ট করতে আমরা একমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবহার করি। যে সরল রেখার উপর বিন্দুটি অবস্থিত সেই সরলরেখা বরাবর একটি অক্ষ বিবেচনা করি। সেটি $X$, $Y$ বা $Z$ -অক্ষ হতে পারে। ভূ-পৃষ্ঠের সমান্তরাল বরাবর কোনো সরলরেখাকে আমরা সাধারণত $X$-অক্ষ ধরি; ভূ-পৃষ্ঠের উপর খাড়া উপর নিচ বরাবর কোনো সরলরেখাকে আমরা $Y$-অক্ষ ধরি। সমতলে অবস্থিত কোনো বিন্দুর অবস্থান দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার সাহায্যে নির্দেশ করা হয়। দুটি অক্ষ $X$ এবং $Y$ যদি পরস্পরের সাথে লম্বভাবে অবস্থান করে তবে তাকে দ্বিমাত্রিক কার্টেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা বা দ্বিমাত্রিক আয়ত স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা বলে। কোনো স্থানে কোনো বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করতে ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার প্রয়োজন হয়। তিনটি অক্ষ $X$, $Y$ এবং $Z$ যদি পরস্পরের সাথে লম্বভাবে অবস্থান করে তাহলে তাকে ত্রিমাত্রিক কার্টেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা বা ত্রিমাত্রিক আয়ত স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা বলা হয়। একটি ডানহাতি স্ক্রুকে $X$-অক্ষ থেকে $Y$-অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে যদি স্ক্রুটি $Z$-অক্ষ বরাবর অগ্রসর হয় তাহলে সেই স্থানাঙ্ক

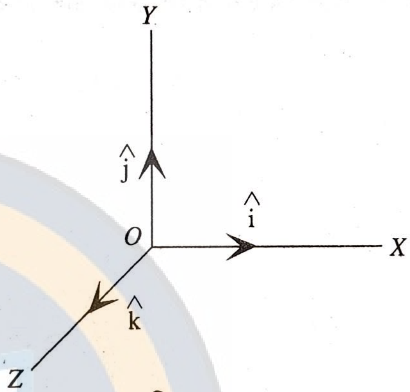
ব্যবস্থাকে ডানহাতি আয়ত স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা (Right Handed Rectangular Coordinate System) বলে। ত্রিমাত্রিক কার্টেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা একটি ডানহাতি আয়ত স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা।

ডানহাতি আয়ত স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার তিনটি অক্ষ বরাবর বিবেচিত একক ভেক্টরগুলোকে আয়ত একক ভেক্টর বলা হয়। ভেক্টরের আলোচনায় এ একক ভেক্টরত্রয়ের গুরুত্ব অপরিসীম।

**সংজ্ঞা :** ত্রিমাত্রিক কার্টেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার তিনটি ধনাত্মক অক্ষ বরাবর যে তিনটি একক ভেক্টর বিবেচনা করা হয় তাদেরকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

কার্টেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার ধনাত্মক $X$-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টরকে $\hat{i}$, ধনাত্মক $Y$-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টরকে $\hat{j}$ এবং ধনাত্মক $Z$-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টরকে $\hat{k}$ দ্বারা সূচিত করা হয় (চিত্র : ২·২৫)।

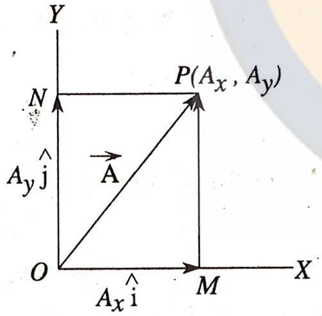
**উদাহরণ :** ধনাত্মক $X$-অক্ষ বরাবর 4 এককের একটি ভেক্টর থাকলে সেটি $4\hat{i}$ হবে, ঋণাত্মক $Y$-অক্ষ বরাবর 10 এককের একটি ভেক্টর হবে $-10\hat{j}$ এবং $6\hat{k}$ হবে ধনাত্মক $Z$-অক্ষ বরাবর 6 এককের ভেক্টর।



চিত্র : ২.২৫

## দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় কোনো ভেক্টর

চিত্র ২·২৬-এ একটি দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা দেখানো হয়েছে যেখানে পরস্পর লম্ব দুটি অক্ষ $X$ ও $Y$ পরস্পরকে $O$ বিন্দুতে ছেদ করেছে। ধরা যাক, $\vec{OP}$ ভেক্টরের পাদবিন্দু $O$ এবং শীর্ষবিন্দু $P$-এর স্থানাঙ্ক $(A_x, A_y)$। এখন $\vec{OP}$ ভেক্টরকে $X$-অক্ষ ও $Y$-অক্ষ বরাবর যথাক্রমে $\vec{OM}$ ও $\vec{ON}$ এ দুটি লম্ব উপাংশে বিভাজিত করা হলো। সুতরাং ভেক্টর যোগের নিয়মানুসারে,



চিত্র : ২·২৬

$$\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP}$$

$$= \vec{OM} + \vec{ON} \quad (\because \vec{MP} = \vec{ON})$$

এখন $\vec{OP}$ কে ভেক্টর $\vec{A}$, $\vec{OM}$ কে ভেক্টর $\vec{A_x}$ এবং $\vec{ON}$ কে ভেক্টর $\vec{A_y}$ দ্বারা সূচিত করলে,

$$\vec{A} = \vec{A_x} + \vec{A_y}$$

এখন $\vec{A_x}$ ও $\vec{A_y}$ ভেক্টর দুটিকে যদি $X$ ও $Y$ অক্ষ বরাবর যথাক্রমে আয়ত একক ভেক্টর $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ এর সাহায্যে প্রকাশ করা হয় তাহলে

$$\vec{A_x} = A_x\,\hat{i} \quad \text{এবং} \quad \vec{A_y} = A_y\,\hat{j}$$

$$\therefore \vec{A} = A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j}$$

এখানে $A_x$ ও $A_y$ হলো যথাক্রমে $X$ ও $Y$ অক্ষের দিকে $\vec{A}$ ভেক্টরের উপাংশের মান।

**ভেক্টরের মান**

২·২৬ চিত্র থেকে

$$OP^2 = OM^2 + MP^2$$

বা, $OP^2 = OM^2 + ON^2$

বা, $A^2 = A_x^2 + A_y^2$

$\therefore\ A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

## ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর

আমরা জানি, কোনো ভেক্টরকে তার মান দিয়ে ভাগ করা হলে ঐ ভেক্টরের দিকে বা বরাবর বা সমান্তরালে একক ভেক্টর পাওয়া যায়।

সুতরাং $\vec{OP}$ বরাবর অর্থাৎ $\vec{A}$ বরাবর বা $\vec{A}$ এর সমান্তরালে একক ভেক্টর

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x\hat{i} + A_y\hat{j}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}}$$

## ত্রিমাত্রিক আয়ত স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় কোনো ভেক্টর

ধরা যাক, কোনো স্থানে $P$ একটি বিন্দু এবং ত্রিমাত্রিক আয়ত স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় এর স্থানাঙ্ক $(A_x, A_y, A_z)$ (চিত্র : ২.২৭)। সুতরাং $\vec{OP}$ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু $P$ এর স্থানাঙ্ক $(A_x, A_y, A_z)$। ২.২৭ চিত্র থেকে ভেক্টর যোগের নিয়মানুসারে আমরা পাই,

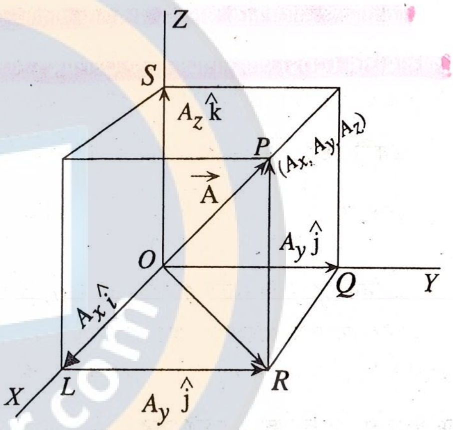
$\vec{OP} = \vec{OR} + \vec{RP}$

আবার, $\vec{OR} = \vec{OL} + \vec{LR}$

$\therefore\ \vec{OP} = \vec{OL} + \vec{LR} + \vec{RP}$

কিন্তু $\vec{LR} = \vec{OQ}$ এবং $\vec{RP} = \vec{OS}$

$\therefore\ \vec{OP} = \vec{OL} + \vec{OQ} + \vec{OS}$



চিত্র : ২.২৭

এখন $\vec{OP}$ ভেক্টরকে $\vec{A}$, $\vec{OL}$ ভেক্টরকে $\vec{A_x}$, $\vec{OQ}$ ভেক্টরকে $\vec{A_y}$ এবং $\vec{OS}$ ভেক্টরকে $\vec{A_z}$ দ্বারা সূচিত করলে আমরা পাই,

$\vec{A} = \vec{A_x} + \vec{A_y} + \vec{A_z}$

এখন $\vec{A_x}$, $\vec{A_y}$ এবং $\vec{A_z}$ ভেক্টর তিনটিকে যদি $X$, $Y$ এবং $Z$-অক্ষ বরাবর যথাক্রমে আয়ত একক ভেক্টর $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ এর সাহায্যে প্রকাশ করা হয়, তাহলে $\vec{A_x} = A_x\hat{i}$, $\vec{A_y} = A_y\hat{j}$ এবং $\vec{A_z} = A_z\hat{k}$।

সুতরাং $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ... ... (2.6)

এখানে $A_x$, $A_y$ ও $A_z$ হলো যথাক্রমে $X$, $Y$ এবং $Z$-অক্ষ বরাবর $\vec{A}$ ভেক্টরের উপাংশের মান।

## ভেক্টরের মান

চিত্র ২.২৭ এর $ORP$ সমকোণী ত্রিভুজ থেকে

$OP^2 = OR^2 + RP^2$

এবং $OLR$ সমকোণী ত্রিভুজ থেকে

$OR^2 = OL^2 + LR^2$

$\therefore\ OP^2 = OL^2 + LR^2 + RP^2$

কিন্তু $LR = OQ$ এবং $RP = OS$

$\therefore\ OP^2 = OL^2 + OQ^2 + OS^2$

$$\therefore A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2.7)$$

**ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর**

$\vec{OP}$ বরাবর অর্থাৎ $\vec{A}$ বরাবর বা $\vec{A}$ এর সমান্তরালে একক ভেক্টর

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2.8)$$

**ব্যাসার্ধ ভেক্টর**

যে ভেক্টরের সাহায্যে স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যায়, তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে। অবস্থান ভেক্টরকে ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\vec{r}$ বলা হয়। কোনো বিন্দু $P$ এর স্থানাঙ্ক $(x, y, z)$ হলে, ব্যাসার্ধ ভেক্টর,

$\vec{r} = \vec{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ এবং এর মান $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ।

**দিক কোসাইন**

ত্রিমাত্রিক কার্টেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় একটি ভেক্টর তিনটি ধনাত্মক অক্ষের সাথে যে তিনটি কোণ উৎপন্ন করে তাদের কোসাইনের (cos) এর মানকে দিক কোসাইন বলে। একটি ভেক্টর $\vec{A}$ যদি ধনাত্মক $X$, $Y$ ও $Z$ অক্ষের সাথে যথাক্রমে $\alpha$, $\beta$ এবং $\gamma$ কোণ উৎপন্ন করে তাহলে $\cos\alpha$, $\cos\beta$ এবং $\cos\gamma$ কে দিক কোসাইন বলা হয়।

একটি ভেক্টর $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ হলে ঐ ভেক্টরের দিক কোসাইনগুলো হলো ,

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

এ দিক কোসাইনগুলো থেকে আমরা $\alpha$, $\beta$ এবং $\gamma$ কোণ নির্ণয় করে $\vec{A}$ ভেক্টরের দিক বের করতে পারি।

দিক কোসাইনগুলোকে অনেক সময় $l$, $m$, $n$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়, যেমন $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$। দেখা যায়, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$। সুতরাং, যেকোনো ভেক্টরে দিক কোসাইনগুলোর বর্গের সমষ্টি সর্বদা 1 হয়।

**উপাংশে বিভাজিত ভেক্টরের যোগ**

দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি উপাংশে বিভাজিত করা থাকে তাহলে তাদের লব্ধি বা যোগফলকেও উপাংশের সাহায্যে সহজেই প্রকাশ করা যায়।

**লব্ধি :** ধরা যাক, $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর এবং $X$, $Y$ ও $Z$–অক্ষ বরাবর এদের উপাংশের মান যথাক্রমে $A$, $A_y$ ও $A_z$ এবং $B_x$, $B_y$ ও $B_z$। তাহলে

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

এবং $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

$\therefore \vec{A} + \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$

বা, $\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2.9)$

এখন $\vec{A} + \vec{B} = \vec{R}$ হলে এবং $X$, $Y$ ও $Z$ অক্ষ বরাবর $R$ এর উপাংশের মান যথাক্রমে $R_x$, $R_y$ এবং $R_z$ হলে

$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2.10)$

**লব্ধির মান :** (2.9) এবং (2.10) সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$R_x = A_x + B_x$, $R_y = A_y + B_y$ এবং $R_z = A_z + B_z$

$$\therefore |\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$
$$= \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2}$$

**লব্ধির সমান্তরাল একক ভেক্টর :** লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$ কে তার মান দিয়ে ভাগ করলেই লব্ধির সমান্তরালে অর্থাৎ $\vec{R}$ এর দিকে একক ভেক্টর পাওয়া যায়,

$$\hat{r} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} = \frac{(A_x + B_x)\,\hat{i} + (A_y + B_y)\,\hat{j} + (A_z + B_z)\,\hat{k}}{\sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2}} \quad \ldots \quad (2.11)$$

### উপাংশে বিভাজিত ভেক্টরের বিয়োগ

দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি উপাংশে বিভাজিত করা থাকে তাহলে তাদের যোগফল বা লব্ধির ন্যায় তাদের বিয়োগফলও উপাংশের সাহায্যে সহজে প্রকাশ করা যায়।

ধরা যাক, $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর এবং $X$, $Y$ ও $Z$ অক্ষ বরাবর এদের উপাংশের মান যথাক্রমে $A_x$, $A_y$ ও $A_z$ এবং $B_x$, $B_y$ ও $B_z$।

তাহলে $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

এবং $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

সুতরাং $\vec{A} - \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) - (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$

বা, $\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\,\hat{i} + (A_y - B_y)\,\hat{j} + (A_z - B_z)\,\hat{k} \quad \ldots \quad (2.12)$

এখন বিয়োগফল $\vec{A} - \vec{B} = \vec{R}$ হলে এবং $X$, $Y$ ও $Z$ অক্ষ বরাবর $\vec{R}$ এর উপাংশের মান যথাক্রমে $R_x$, $R_y$ এবং $R_z$ হলে

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k} \quad \ldots \quad (2.13)$$

**বিয়োগফলের মান :**

(2.12) এবং (2.13) সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$R_x = A_x - B_x$, $R_y = A_y - B_y$ এবং $R_z = A_z - B_z$

$$\therefore |\vec{R}| = |\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_x^2}$$
$$= \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2}$$

## ২.৮। ভেক্টরের গুণন
**Multiplication of Vectors**

ভেক্টর রাশির গুণন দু'ভাবে হতে পারে।

১. ভেক্টর রাশিকে স্কেলার রাশি দ্বারা গুণ এবং

২. ভেক্টর রাশিকে ভেক্টর রাশি দ্বারা গুণ।

**১. ভেক্টর রাশিকে স্কেলার রাশি দ্বারা গুণ :** কোনো ভেক্টর রাশিকে স্কেলার রাশি দ্বারা গুণ করলে গুণফল একটি ভেক্টর রাশি হয়। $\vec{A}$ ভেক্টর রাশিকে যদি $m$ স্কেলার রাশি দ্বারা গুণ করা হয় তবে নতুন ভেক্টর $m\vec{A}$ পাওয়া যাবে যার মান হবে $|m\vec{A}|$ এবং দিক হবে $\vec{A}$ ভেক্টরের দিকে। যদি $m$ এর মান ঋণাত্মক হয় তবে $m\vec{A}$ ভেক্টরের দিক হবে $\vec{A}$ ভেক্টরের বিপরীত দিকে।

বস্তুর ভর $m$ এবং ত্বরণ $\vec{a}$ এর গুণফল বল হলো,

$\vec{F} = m\vec{a}$ একটি ভেক্টর রাশি। বলের দিক ত্বরণের দিকে।

**২. ভেক্টর রাশিকে ভেক্টর রাশি দ্বারা গুণ :** দুটি ভেক্টর রাশির মধ্যে গুণের প্রকৃতি অনুযায়ী গুণফল একটি স্কেলার রাশি অথবা একটি ভেক্টর রাশি হতে পারে। দুটি ভেক্টর রাশির মধ্যে যখন স্কেলার গুণন বা ডট গুণন করা হয় তখন গুণফল একটি স্কেলার রাশি পাওয়া যায়। আবার দুটি ভেক্টরের মধ্যে যখন ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন করা হয় তখন গুণফল একটি ভেক্টর রাশি পাওয়া যায়।

## ২.৯। স্কেলার গুণন : স্কেলার গুণফল বা ডট গুণফল
## Scalar Multiplication : Scalar Product or Dot Product

**দুটি ভেক্টরের গুণনে যদি একটি স্কেলার রাশি পাওয়া যায় তখন রাশি দুটির স্কেলার গুণন বা ডট গুণন হয় এবং এ গুণফলকে বলা হয় স্কেলার গুণফল বা ডট গুণফল। স্কেলার গুণফলের মান হয় রাশি দুটির মানের এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত ক্ষুদ্রতর কোণের cosine-এর গুণফলের সমান।**

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর রাশির মধ্যে যখন স্কেলার গুণ করা হয় তখন আমরা $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মাঝখানে একটি বিন্দু বা ডট (.) বসাই অর্থাৎ $\vec{A}.\vec{B}$ এবং পড়ি $\vec{A}$ ডট $\vec{B}$।

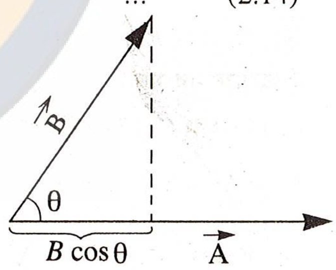
$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর রাশির মধ্যবর্তী কোণ $\theta$ হলে স্কেলার গুণফল

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = AB\cos\theta \text{ (যখন } 0 \le \theta \le \pi) \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.14)$$

কিন্তু $B\cos\theta$ হচ্ছে $\vec{A}$ এর দিকে $\vec{B}$ এর উপাংশ বা $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ (চিত্র ২·২৮)।

আবার, $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta = B(A\cos\theta)$

কিন্তু $A\cos\theta$ হচ্ছে $\vec{B}$ এর দিকে $\vec{A}$-এর উপাংশ বা $\vec{B}$-এর উপর $\vec{A}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ।



চিত্র : ২·২৮

সুতরাং যেকোনো দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল বলতে আমরা যেকোনো একটি ভেক্টরের মান এবং সেই ভেক্টরের দিকে অপর ভেক্টরের উপাংশের বা সেই ভেক্টরের উপর অপর ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপের গুণফলকে বুঝি। দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল তাই যেকোনো একটি ভেক্টর ও সেই ভেক্টরের উপর অপর ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপকে সন্নিহিত বাহু ধরে কল্পিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে।

**উদাহরণ :** বল $\vec{F}$ এবং সরণ $\vec{S}$-এর স্কেলার গুণফল কাজ $W = \vec{F}.\vec{S} = FS\cos\theta$ একটি স্কেলার রাশি।

**ভেক্টরের স্কেলার গুণফল বিনিময় সূত্র ও বণ্টন সূত্র মেনে চলে :**

বিনিময় সূত্র : $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

বণ্টন সূত্র : $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

**আয়ত একক ভেক্টরগুলোর স্কেলার গুণফল :**

$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

$\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$

প্রমাণ : ত্রিমাত্রিক কার্টেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক $X$-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর হচ্ছে $\hat{i}$:

সুতরাং $\hat{i}$ এর মান 1 এবং $X$-অক্ষ বরাবর দুটি একক ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ 0°

$$\therefore \hat{i}.\hat{i} = (1)(1)\cos 0^\circ = 1$$

অনুরূপভাবে, $\hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

সুতরাং $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

আবার, $\hat{i}.\hat{j} = |\hat{i}|\,|\hat{j}|\cos(\hat{i}, \hat{j})$

$= (1)(1)\cos 90^\circ$ [ $\because$ $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ যথাক্রমে $X$ এবং $Y$-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর,

$= 0$ সুতরাং এদের মধ্যবর্তী কোণ 90° এবং প্রত্যেকের মান 1 একক]

অনুরূপভাবে, $\hat{j}.\hat{i} = 0$, $\hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{j} = 0$, $\hat{k}.\hat{i} = \hat{i}.\hat{k} = 0$

সুতরাং $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$

**উপাংশে বিভাজিত দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল :**

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

প্রমাণ : ধরা যাক, $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

এবং $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

$$\therefore \vec{A}.\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}).(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= A_x\hat{i}.(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) + A_y\hat{j}.(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) + A_z\hat{k}.(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= A_x B_x\,\hat{i}.\hat{i} + A_xB_y\,\hat{i}.\hat{j} + A_xB_z\,\hat{i}.\hat{k} + A_yB_x\,\hat{j}.\hat{i} + A_yB_y\,\hat{j}.\hat{j} + A_yB_z\,\hat{j}.\hat{k} +$$
$$A_zB_x\,\hat{k}.\hat{i} + A_zB_y\,\hat{k}.\hat{j} + A_zB_z\,\hat{k}.\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + 0 + 0 + 0 + A_yB_y + 0 + 0 + 0 + A_zB_z$$

[$\because$ $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$ এবং $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{i} = \hat{i}.\hat{k} = 0$ ]

$$\therefore \vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.15)$$

অর্থাৎ দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল = রাশি দুটির $X$ উপাংশের মানের গুণফল + রাশি দুটির $Y$ উপাংশের মানের গুণফল + রাশি দুটির $Z$ উপাংশের মানের গুণফল।

**লম্ব ভেক্টর ও স্কেলার গুণফল :**

ধরা যাক, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ এবং কোনোটি নাল ভেক্টর নয়।

এখন যদি $\vec{A}.\vec{B} = 0$ হয় তাহলে

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta = 0$$

$\therefore \; \cos\theta = 0$ (যদি $A$ এবং $B$ শূন্য না হয়)

বা, $\theta = 90°$

অর্থাৎ, দুটি ভেক্টরের ডট গুণফল যদি শূন্য হয় এবং তাদের কোনোটি যদি নাল ভেক্টর না হয়, তাহলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হয়।

বিপরীতক্রমে, যেহেতু $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$

এখন যদি $\theta = 90°$ হয়

তাহলে $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos 90° = 0$

অর্থাৎ, দুটি ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণ $90°$ হলে তাদের ডট গুণফল শূন্য হবে।

এখন যদি ভেক্টর দুটি উপাংশে বিভাজিত থাকে অর্থাৎ, যদি

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ এবং $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ হয়

তাহলে $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

সুতরাং $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0$ হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে বা বিপরীতক্রমে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0$ হবে।

## ২.১০। ভেক্টর গুণন : ভেক্টর গুণফল বা ক্রস গুণফল

### Vector Multiplication : Vector Product or Cross Product

দুটি ভেক্টরের গুণনে যদি একটি ভেক্টর রাশি পাওয়া যায় তখন রাশি দুটির ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন হয় এবং এ গুণফলকে বলা হয় ভেক্টর গুণফল।

$\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টরের মধ্যে যখন ভেক্টর গুণ করা হয়, তখন আমরা $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মাঝখানে একটা ক্রস ($\times$) বসিয়ে লিখি $\vec{A} \times \vec{B}$ এবং পড়ি $\vec{A}$ ক্রস $\vec{B}$। ভেক্টর গুণফলের মান হয় রাশি দুটির মানের এবং এদের অন্তর্ভুক্ত ক্ষুদ্রতর কোণের sine এর গুণফলের সমান। ভেক্টর গুণফলের দিক ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম থেকে পাওয়া যায়।

**ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম : দুটি ভেক্টরের সমতলে একটি ডানহাতি স্ক্রুকে লম্বভাবে স্থাপন করে প্রথম ভেক্টর থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যে দিকে অগ্রসর হবে সে দিকে হবে ভেক্টর গুণফলের দিক।**

**নিজে কর :** বাম হাত দিয়ে পরস্পর সমকোণে দুটি কলম ধর। একটির মুখ খাড়া উপরের দিকে, অপরটির মুখ উত্তর দিকে। মনে কর, উপরের দিকে মুখ করা কলমটি $\vec{A}$ ভেক্টরের দিক এবং উত্তর দিক মুখ করা কলমটি $\vec{B}$ ভেক্টরের দিক নির্দেশ করে। সুতরাং $\vec{A}$ ভেক্টরের দিক উপরের দিকে আর $\vec{B}$ ভেক্টরের দিক উত্তর দিকে। এখন ডান হাত দিয়ে কলম দুটির সমতলে লম্বভাবে আরেকটি কলম ধর। নিঃসন্দেহে এটি পূর্ব-পশ্চিম বরাবর হবে। ডান হাতের কলমটিকে $\vec{A}$ থেকে $\vec{B}$ এর দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে অর্থাৎ $90°$ কোণে ঘুরাতে থাকো। কলমটি কোন দিকে অগ্রসর হচ্ছে? কলমটি যে দিকে যাচ্ছে সে দিক হচ্ছে $\vec{A} \times \vec{B}$ এর দিক। এখন বাম হাতের কলম জোড়াকে বিভিন্ন দিকে যেমন পূর্ব-দক্ষিণ, নিচ-পূর্ব, উত্তর-পশ্চিম, দক্ষিণ-উপর ইত্যাদি দিকে স্থাপন করে একটিকে $\vec{A}$ এবং অপরটিকে $\vec{B}$ ধরে $\vec{A} \times \vec{B}$ এবং $\vec{B} \times \vec{A}$ এর দিক নির্ণয় কর।

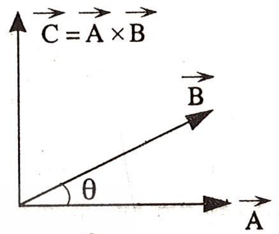
**সংজ্ঞা : দুটি ভেক্টরের যে গুণনে একটি ভেক্টর রাশি পাওয়া যায় তাকে ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর গুণন বলে। ভেক্টরদ্বয়ের মান এবং তাদের মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতর কোণের sine এর গুণফলকে ভেক্টর গুণফলের মান বলে। ভেক্টর**

**গুণফলের দিক হয় উভয় ভেক্টরের সমতলে লম্বভাবে স্থাপিত একটি ডানহাতি স্ক্রুকে প্রথম ভেক্টর থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে যে দিকে অগ্রসর হয় সে দিকে।**

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে আমরা $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর ভেক্টর গুণনের ফলে যে নতুন ভেক্টর $\vec{C}$ পাই, তা হলো

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \hat{n}\, |\vec{A}|\, |\vec{B}| \sin\theta \quad (\text{যখন } 0 \le \theta \le \pi) \quad \ldots \quad (2.16)$$

এখানে, $\hat{n}$ একটি একক ভেক্টর যা $\vec{A} \times \vec{B}$ অর্থাৎ $\vec{C}$ এর দিক নির্দেশ করে[১]। এই $\hat{n}$ এর মান 1 এবং এর দিক ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম থেকে পাওয়া যায়। একটি ডানহাতি স্ক্রুকে উভয় ভেক্টরের সমতলে লম্বভাবে স্থাপন করে $\vec{A}$ থেকে $\vec{B}$ এর দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যে দিকে অগ্রসর হবে $\hat{n}$ তথা $\vec{C}$ এর দিক হবে সে দিকে (চিত্র ২·২৯)।



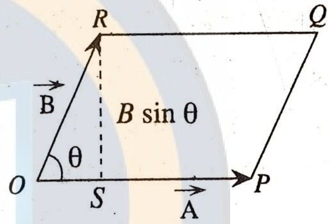
চিত্র : ২·২৯

$$\therefore\ C = |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin\theta \quad \ldots \quad (2.17)$$

কিন্তু $B \sin\theta$ হচ্ছে $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ কে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত $OPQR$ সামান্তরিকের উচ্চতা (চিত্র : ২·৩০)

$$\therefore\ C = AB \sin\theta$$
$$= OP \times OR \sin\theta$$
$$= OP \times RS$$
$$= A \times h$$
$= $ সামান্তরিকের ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= $ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল



চিত্র : ২·৩০

সুতরাং দুটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণফলের মান ভেক্টর দুটিকে সন্নিহিত বাহু ধরে কল্পিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।

কোনো ঘূর্ণায়মান কণার ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ এবং কণার উপর প্রযুক্ত বল $\vec{F}$-এর ভেক্টর গুণফল টর্ক (Torque) $\vec{\tau}$, একটি ভেক্টর রাশি,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \hat{n}\, rF \sin\theta$$

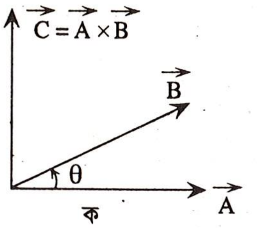
বা, $\tau = rF \sin\theta$

### ভেক্টর গুণফল বিনিময় সূত্র মানে না : $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

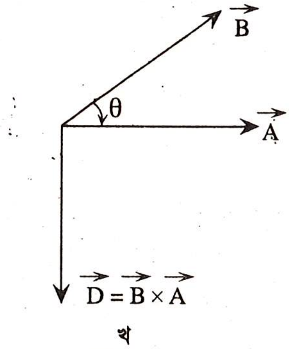
$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ এর মান হলো $AB \sin\theta$ এবং এর দিক হলো এমন যে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ একটি ডানহাতি ব্যবস্থা তৈরি করে (চিত্র : ২·৩১ ক)। $\vec{C}$ এর দিক হচ্ছে $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ উভয় ভেক্টরের উপর লম্ব বরাবর ডানহাতি স্ক্রুকে $\vec{A}$ থেকে $\vec{B}$ এর দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে যে দিকে অগ্রসর হবে সে দিকে। আবার, $\vec{B} \times \vec{A} = \vec{D}$ এর মান হলো $BA \sin\theta$ এবং দিক হলো এমন যে $\vec{B}$ ও $\vec{A}$ এবং $\vec{D}$ একটি ডানহাতি ব্যবস্থা তৈরি করে (চিত্র: ২·৩১ খ)। $\vec{D}$-এর দিক হচ্ছে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ উভয় ভেক্টরের উপর লম্ব বরাবর ডানহাতি স্ক্রুকে $\vec{B}$ থেকে $\vec{A}$ এর দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে যে দিক অগ্রসর হবে সে দিকে।

---

[১] $\hat{n}$ একক ভেক্টরটি $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর সাথে লম্ব অর্থাৎ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর সমতলের সাথে একটি অভিলম্ব (normal) ভেক্টর। $\vec{A} \times \vec{B}$ এর দিক যে $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর সমতলের সাথে অভিলম্ব (normal) সেটা বোঝানোর জন্য এ ভেক্টরকে $\hat{n}$ দিয়ে নির্দেশ করা হয়।




চিত্র : ২·৩১ (ক)




চিত্র : ২·৩১ (খ)

সুতরাং দেখা যায়, $\vec{D}$ ও $\vec{C}$ এর মান সমান কিন্তু দিক বিপরীত অর্থাৎ, $\vec{C} = -\vec{D}$

বা, $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

সুতরাং বলা চলে ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

## আয়ত একক ভেক্টরগুলোর ভেক্টর গুণফল

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0};$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k},\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i},\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

**প্রমাণ :** ভেক্টর গুণফলের সংজ্ঞানুসারে, $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{n}\ |\hat{i}|\ |\hat{i}|\ \sin 0^\circ$

[$\because$ দুটি সমান ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণ $0^\circ$]

$= \vec{0}$ [$\because \sin 0^\circ = 0$]

অনুরূপভাবে, $\hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$

$\therefore \hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$

আবার, $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{n}\ |\hat{i}|\ |\hat{j}|\ \sin(\hat{i}, \hat{j})$

$= \hat{n}\ (1)\ (1)\ \sin 90^\circ = \hat{n}$

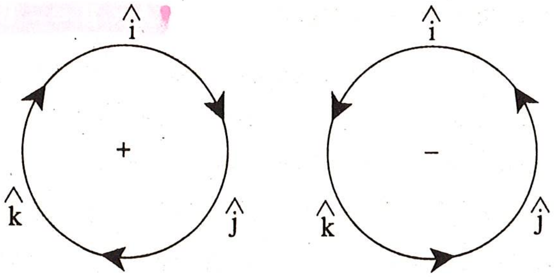
সংজ্ঞানুসারে $\hat{n}$ একক ভেক্টরটি $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ এর উপর লম্ব এবং ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম অনুসারে এর দিক হচ্ছে ধনাত্মক $Z$- অক্ষের দিকে। সুতরাং $\hat{n}$ হচ্ছে ধনাত্মক $Z$ -অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর, অর্থাৎ $\hat{k}$

$\therefore \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$

অনুরূপভাবে, $\hat{i} \times \hat{j} = -(\hat{j} \times \hat{i}) = \hat{k}$

$\hat{j} \times \hat{k} = -(\hat{k} \times \hat{j}) = \hat{i}$

$\hat{k} \times \hat{i} = -(\hat{i} \times \hat{k}) = \hat{j}$




(ক) (খ)

চিত্র : ২·৩২

সুতরাং $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ আয়ত একক ভেক্টর তিনটির যেকোনো দুটির ভেক্টর গুণফল সহজে পাওয়া যায়। একই ক্রমের দুটি আয়ত একক ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল তৃতীয় আয়ত একক ভেক্টর হয় (চিত্র : ২·৩২ ক)। আর বিপরীত ক্রমের দুটি আয়ত একক ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল তৃতীয় আয়ত একক ভেক্টরের ঋণাত্মক ভেক্টর হয় (চিত্র : ২·৩২ খ)।

**উপাংশে বিভাজিত দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল :**

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

প্রমাণ : ধরা যাক, $\vec{A} = \hat{i}\, A_x + \hat{j}\, A_y + \hat{k}\, A_z$

এবং $\vec{B} = \hat{i} B_x + \hat{j} B_y + \hat{k}\, B_z$

সুতরাং $\vec{A} \times \vec{B} = (\hat{i}\, A_x + \hat{j}\, A_y + \hat{k}\, A_z) \times (\hat{i}\, B_x + \hat{j}\, B_y + \hat{k}\, B_z)$

$= (\hat{i} \times \hat{i})\, A_x\, B_x + (\hat{i} \times \hat{j})\, A_x\, B_y + (\hat{i} \times \hat{k})\, A_x B_z$

$+ (\hat{j} \times \hat{i})\, A_y\, B_x + (\hat{j} \times \hat{j})\, A_y\, B_y + (\hat{j} \times \hat{k})\, A_y\, B_z$

$+ (\hat{k} \times \hat{i})\, A_z\, B_x + (\hat{k} \times \hat{j})\, A_z B_y + (\hat{k} \times \hat{k})\, A_z B_z$

$= \vec{0} + \hat{k}\, A_x\, B_y - \hat{j}\, A_x\, B_z - \hat{k}\, A_y\, B_x + \vec{0} + \hat{i}\, A_y\, B_z$

$+ \hat{j}\, A_z\, B_x - \hat{i}\, A_z\, B_y + \vec{0}$

$= \hat{i}\, (A_y\, B_z - A_z\, B_y) + \hat{j}\, (A_z\, B_x - A_x\, B_z) + \hat{k}\, (A_x\, B_y - A_y\, B_x)$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.18)$$

**সমান্তরাল ভেক্টর ও ভেক্টর গুণফল :**

ধরা যাক, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\theta$ এবং কোনোটি নাল ভেক্টর নয়।

এখন যদি $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ হয়

তাহলে $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin\theta = 0$

কিন্তু যেহেতু $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ কোনোটির মান শূন্য নয়,

$\therefore \sin\theta = 0$

বা, $\theta = 0°$

অর্থাৎ, **দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফল যদি নাল ভেক্টর হয় এবং তাদের কোনোটি যদি নাল ভেক্টর না হয়, তাহলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।**

বিপরীতক্রমে যেহেতু $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin\theta$

এখন যদি $\theta = 0°$ হয়, তাহলে $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin 0° = 0$

**অর্থাৎ দুটি ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণ $0°$ হলে তাদের ক্রস গুণফল নাল ভেক্টর হবে।**

এখন যদি ভেক্টর দুটি উপাংশে বিভাজিত থাকে

অর্থাৎ যদি $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ এবং

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ হয়

তাহলে, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{0}$ হলে

ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।

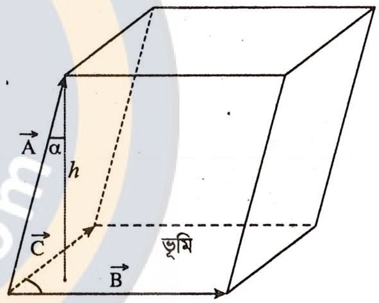
**ত্রিগুণফল (Triple Product) :**

তিনটি ভেক্টর রাশির গুণফলকে ত্রিগুণফল বা triple product বলে। তিনটি ভেক্টর রাশির গুণফল স্কেলার রাশি হলে তাকে স্কেলার ত্রিগুণফল বা scalar triple product বলে। আর তিনটি ভেক্টর রাশির গুণফল ভেক্টর রাশি হলে তাকে ভেক্টর ত্রিগুণফল বা vector triple product বলে। আমরা এখানে স্কেলার ত্রিগুণফল নিয়ে আলোচনা করবো।

দুটি ভেক্টর রাশির ক্রস গুণফলের সাথে তৃতীয় ভেক্টরটির ডট গুনন করা হলে গুণফল হবে একটি স্কেলার রাশি আর এ ধরনের গুননকে বলা হয় স্কেলার ত্রিগুণ এবং গুণফলকে বলে স্কেলার ত্রিগুণফল। $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ তিনটি ভেক্টর রাশির স্কেলার ত্রিগুনন হতে পারে নিম্নোক্তভাবে—

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ বা, $\vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$ বা, $\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

এখানে $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$



চিত্র : ২.৩৩

তিনটি ভেক্টর $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ যদি একটি ঘন সামান্তরিক বা সামান্তরক বা প্যারালেলেপাইপড (parallelepiped)-এর তিনটি বাহু নির্দেশ করে (চিত্র-২.৩৩) তাহলে ঐ ঘন সামান্তরিক বা সমান্তরকের আয়তন হবে

আয়তন, $V = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ ... ... (2.20)

এখন, ভেক্টর, $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

এবং $\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$ হলে,

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.21)$$

$\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত হওয়ার অর্থ ঘন সামান্তরিক বা সামান্তরকটির উচ্চতা শূন্য অর্থাৎ সামান্তরকটির আয়তনও শূন্য। সুতরাং **তিনটি ভেক্টরের স্কেলার ত্রিগুণফল শূন্য হলে ভেক্টর তিনটি সমতলীয় বা একই সমতলে অবস্থিত হবে।** অর্থাৎ $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ হলে $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত হবে।

## ২.১১। ক্যালকুলাস : গণিতের একটি শাখা
## Calculus : A Branch of Mathematics

গণিতের একটি গুরুত্বপূর্ণ শাখা হচ্ছে ক্যালকুলাস। জ্যামিতি যেমন আকৃতির এবং বীজগণিত যেমন বিভিন্ন ক্রিয়া (Operatoins) সমূহ এবং সমীকরণ সমাধানে তাদের ব্যবহার নিয়ে অধ্যয়ন করে, তেমনি ক্যালকুলাস হচ্ছে পরিবর্তনের

গাণিতিক অধ্যয়ন। ক্যালকুলাসের দুটি প্রধান শাখা হচ্ছে অন্তরকলন বা ব্যবকলনী ক্যালকুলাস (Differential Calculus) ও যোগজ ক্যালকুলাস (Integral Calculus)। অন্তরকলন ক্যালকুলাসে প্রধানত ক্রমবর্ধমান বা ক্রমহ্রাসমান রাশি এবং তাদের পরিবর্তনের হার এবং বক্র রেখার ঢাল নিয়ে আলোচনা করা হয়। দুটি রাশির একটির ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য অন্যটির পরিবর্তন অর্থাৎ রাশি দুটির একটির সাপেক্ষে অপরটির পরিবর্তনের হারই অন্তরকলনের বিষয়বস্তু। অপরপক্ষে যোগজ ক্যালকুলাস বা সমাকলন আলোচনা করে রাশিসমূহের সংকলন (accumulation) এবং বক্ররেখা বেষ্টিত কোনো ক্ষেত্রের অন্তর্গত ক্ষেত্রফল, ঘন বস্তুর আয়তন নিয়ে।

ঐতিহাসিকভাবে ক্যালকুলাস পরিচিত ছিল "the calculus of infinitesimals", বা ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্রের ক্যালকুলাস হিসেবে। এর উৎপত্তি ল্যাটিন calculus শব্দ থেকে যার অর্থ গণনার জন্য ক্ষুদ্র পাথর। ক্যালকুলাস গণিতের শাখা যা সীমা, অপেক্ষক, অন্তরক, যোগজ এবং অসীম ধারা প্রভৃতিতে কেন্দ্রীভূত। অষ্টাদশ শতাব্দী পর্যন্ত বিভিন্ন ধারণাসমূহ অপেক্ষক, অন্তরক এবং যোগজ এ রূপ লাভ করে, কিন্তু চূড়ান্ত ধাপ সম্পন্ন হয় নিউটন ও লাইবনিজের হাতে।

ক্যালকুলাস ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয় বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায়, অর্থনীতি ও প্রকৌশল শাস্ত্রে যেখানে বীজগণিতের পক্ষে একা সমস্যার সমাধান সম্ভব নয়। পদার্থবিজ্ঞানের ভাষা হচ্ছে গণিত। উচ্চতর পদার্থবিজ্ঞানের ক্ষেত্রে ক্যালকুলাসের ব্যবহার অপরিহার্য। ক্যালকুলাসের সাহায্যে আমরা পদার্থবিজ্ঞানের সূত্রগুলোকে সহজে গাণিতিকরূপে প্রকাশ করতে পারি। বিভিন্ন রাশি ও সমীকরণগুলো অতি সহজে ক্যালকুলাসের সাহায্যে প্রতিপাদন করতে পারি। উদাহরণ হিসেবে নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র "বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার তার উপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক এবং বল যে দিকে ক্রিয়া করে ভরবেগের পরিবর্তনও সে দিকে ঘটে" কে আমরা ক্যালকুলাসের সাহায্যে প্রকাশ করতে পারি $\frac{d\vec{P}}{dt} \propto \vec{F}$। এ বইয়ে আমরা প্রয়োজনমতো ক্যালকুলাস ব্যবহার করবো।

**ধ্রুবক (Constant) :** গাণিতিক ক্রিয়ার ক্ষেত্রে যে সকল রাশি অপরিবর্তনশীল তাদেরকে ধ্রুবক বলে। যেমন-সকল স্বাভাবিক সংখ্যা, ভগ্নাংশ, $\pi$, e ইত্যাদি।

**চল রাশি বা চলক (Variable) :** গণিতিক ক্রিয়ার ক্ষেত্রে যে সকল রাশি পরিবর্তনশীল অর্থাৎ বিভিন্ন মান ধারণ করতে পারে তাদেরকে চলরাশি বা চলক বলে। সাধারণত $x, y, z, u, v, w$ ইত্যাদি চলরাশি বিবেচনা করা হয়।

**ফাংশন বা অপেক্ষক (Function) :** দুটি পরস্পর নির্ভরশীল চলক যার একটি পরিবর্তিত হলে অপরটিও পরিবর্তিত হয়, এদের মধ্যে যে চলকটি ইচ্ছানুযায়ী পরিবর্তন করা যায় তাকে **স্বাধীন চলক** (independent variable) এবং যে চলকটিকে ইচ্ছানুযায়ী পরিবর্তন করা যায় না, অপর চলকের পরিবর্তনের উপর নির্ভরশীল তাকে অধীন বা **নির্ভরশীল** চলক (dependent variable) বলে। **অধীন চলককে স্বাধীন চলকের অপেক্ষক বা ফাংশন বলে।** যেমন সরল দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য পরিবর্তন করলে এর দোলনকালের পরিবর্তন হয়। দোলকের দৈর্ঘ্য আমরা ইচ্ছামতো পরিবর্তন করতে পারি। কিন্তু দোলনকাল আমাদের ইচ্ছানুযায়ী পরিবর্তিত হবে না। কার্যকর দৈর্ঘ্য পরিবর্তন করলেই দোলনকাল পরিবর্তিত হবে। তাই দোলকের দোলনকাল হচ্ছে এর কার্যকর দৈর্ঘ্যের অপেক্ষক।

**অপারেটর (Operator) :** বর্গ ($^2$), ঘন ($^3$), বর্গমূল ($\sqrt{}$), log, sine ইত্যাদির কোনো নির্দিষ্ট মান নেই, এগুলো কোনো অর্থ প্রকাশ করে না। কিন্তু এগুলো যখন ভিন্ন ভিন্ন রাশির উপর ক্রিয়া করে তখন এক একটা মান প্রদান করে, যেমন $4^2 = 16, 5^2 = 25; \sqrt{49} = 7, \sqrt{64} = 8;$ $\log 100 = 2,$ $\log 25 = 1.39794;$ $\sin 30^o = \frac{1}{2},$ $\tan 60^o = \sqrt{3}$ ইত্যাদি। এগুলোকে বলা হয় সংঘটক বা অপারেটর (operator)। আসলে **যে গাণিতিক ক্রিয়া একটি রাশিকে অন্য রাশিতে রূপান্তরিত করে তাকে অপারেটর বলা হয়।**

## অন্তরীকরণ বা ব্যবকলন : অন্তরক বা ব্যবকলনী অপারেটর $\frac{d}{dx}$

## Differentiation : Differential Operator $\frac{d}{dx}$

ক্যালকুলাসে ব্যবহৃত অন্তরক অপারেটর হচ্ছে $\frac{d}{dx}$। এ $\frac{d}{dx}$ এর নিজস্ব কোনো অর্থ নেই, কিন্তু এটি যদি $y$ এর উপর ক্রিয়া করে, তাহলে আমরা $\frac{dy}{dx}$ পাই, যার একটি অর্থ আছে। ধরা যাক, $y$ একটি রাশি যার মান $x$ এর উপর নির্ভর করে অর্থাৎ $y$ হলো $x$ এর অপেক্ষক $y(x)$। তাহলে $x$ এর সাপেক্ষে $y$ কে অন্তরীকরণ করা যাবে এবং পাওয়া যাবে $\frac{dy}{dx}$। এখানে $\frac{dy}{dx}$ হচ্ছে $x$ এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য $x$ এর সাপেক্ষে $y$ এর পরিবর্তনের হার বা $x$ এর সাপেক্ষে $y$ এর বৃদ্ধিহার (derivative)। একে $x$ এর সাপেক্ষে $y$ এর অন্তরকও বলে।[১] $x$ এর পরিবর্তন যখন শূন্যের কাছাকাছি অর্থাৎ **$x$ এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য $x$ এর সাপেক্ষে $y$ এর পরিবর্তনের হারকে $x$ এর সাপেক্ষে $y$ এর অন্তরক $\frac{dy}{dx}$** বলে।

ক্যালকুলাস থেকে আমরা জানি,

একটি স্বাধীন রাশি $x$ এর একটি মানের জন্য নির্ভরশীল রাশি $y$ এর মান যদি হয় $y(x)$ এবং $x$ এর মান $\Delta x$ পরিমাণ পরিবর্তিত হয়ে $x + \Delta x$ হলে যদি $y$ এর মান $\Delta y$ পরিমাণ পরিবর্তিত হয়,

তাহলে $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ এবং

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

### অন্তরীকরণ বা ব্যবকলনের কয়েকটি সূত্র

ক্যালকুলাসে ব্যবহৃত কয়েকটি সাধারণ অন্তরীকরণ সূত্র নিচে দেওয়া হলো। এখানে $u$ এবং $v$ হচ্ছে $x$ এর অপেক্ষক এবং $a$ ও $m$ হচ্ছে ধ্রুব সংখ্যা।

1. $\frac{dx}{dx} = 1$
2. $\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$
5. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
7. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
8. $\frac{d}{dx}(\sin ax) = a\cos ax$
9. $\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a\sin ax$
10. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
11. $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$
12. $\frac{d}{dx}(e^{mx}) = me^{mx}$

---

১. $\frac{dy}{dx}$ কে পড়া হয় $y$ এর ডি ডি $x$ বা ইংরেজিতে $d\,d\,x$ of $y$ অর্থাৎ $\frac{d}{dx}$ of $y$।
অনেকে এটাকে $dy\ dx$ও পড়ে থাকেন। তবে কখনোই একে $dy$ বাই (ভাগ) $dx$ পড়া যাবে না, কেননা, এটা $dy$ এবং $dx$ এর ভাগফল বা অনুপাত নয়।

## আংশিক অন্তরীকরণ বা ব্যবকলন (Partial Differentiation)

যখন একটি রাশি $f$ এর মান $x$ এর উপর নির্ভর করে অর্থাৎ $f$ হয় $x$ এর অপেক্ষক $f(x)$, তখন $x$ এর সাপেক্ষে $f$ কে অন্তরীকরণ করা যায় এবং পাওয়া যায় $\frac{df}{dx}$। এখানে $\frac{df}{dx}$ হচ্ছে $x$ এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য $x$ এর সাপেক্ষে $f$ এর পরিবর্তনের হার বা $x$ এর সাপেক্ষে $f$ এর অন্তরক বা বৃদ্ধিহার (derivative)। কিন্তু যদি $f$ কেবল $x$ এর অপেক্ষক না হয়ে দুই বা ততোধিক রাশির অপেক্ষক হয় যেমন $x$, $y$ ও $z$ এর অপেক্ষক। তখন যদি আলাদা আলাদাভাবে অন্যগুলোকে ধ্রুবক ধরে একটির সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করা হয় তখন সেই অন্তরীকরণকে বলা হয় আংশিক অন্তরীকরণ। সেই ক্ষেত্রে আমরা $\frac{\partial}{\partial x}$ অপারেটর ব্যবহার করি। যেমন $\frac{\partial f}{\partial x}$ হচ্ছে $x$ এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য $x$ এর সাপেক্ষে $f$ এর পরিবর্তনের হার বা $x$ এর সাপেক্ষে $f$ এর আংশিক অন্তরক বা আংশিক বৃদ্ধিহার। তেমনিভাবে $\frac{\partial f}{\partial y}$ হচ্ছে $y$ এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য $y$ এর সাপেক্ষে $f$ এর আংশিক পরিবর্তনের হার বা $y$ এর সাপেক্ষে $f$ এর আংশিক অন্তরক বা আংশিক বৃদ্ধিহার এবং $\frac{\partial f}{\partial z}$ হচ্ছে $z$-এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য $z$ এর সাপেক্ষে $f$ এর আংশিক পরিবর্তনের হার বা $z$ এর সাপেক্ষে $f$ এর আংশিক অন্তরক বা আংশিক বৃদ্ধিহার। উল্লেখ্য যে, পূর্ণ অন্তরীকরণে অপারেটরে সোজা $d$ এবং আংশিক অন্তরীকরণে অপারেটরে বাঁকা $\partial$ ব্যবহার করা হয়।

**সম্প্রসারিত কর্মকাণ্ড :** $A = 3x^2yz + 4xyz^3 + 2xy$ হলে $x$, $y$ এবং $z$ এর সাপেক্ষে $A$ এর অন্তরক বের কর।

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[3x^2yz + 4xyz^3 + 2xy]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2yz) + \frac{\partial}{\partial x}(4xyz^3) + \frac{\partial}{\partial x}(2xy)$$

$$= 6xyz + 4yz^3 + 2y$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[3x^2yz + 4xyz^3 + 2xy]$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(3x^2yz) + \frac{\partial}{\partial y}(4xyz^3) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy)$$

$$= 3x^2z + 4xz^3 + 2x$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[3x^2yz + 4xyz^3 + 2xy]$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}(3x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(4xyz^3) + \frac{\partial}{\partial z}(2xy)$$

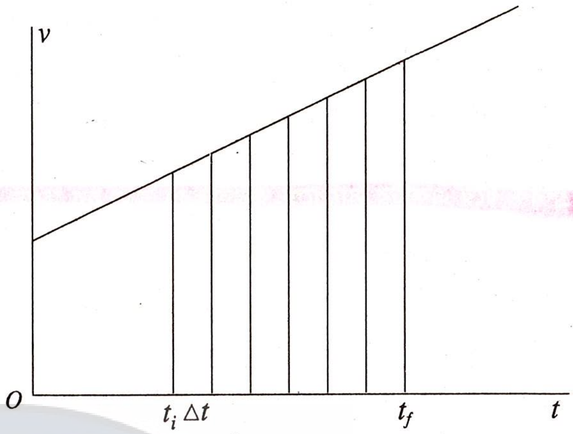
$$= 3x^2y + 12xyz^2 + 0$$

উ: $6xyz + 4yz^3 + 2y$, $3x^2z + 4xz^3 + 2x$, $3x^2y + 12xyz^2$

## যোগজীকরণ বা সমাকলন (Integration)

ধরা যাক, কোনো বস্তু একটি নির্দিষ্ট দিকে অর্থাৎ একটি সরলরেখা বরাবর গতিশীল। বস্তুটির বেগের দিক নির্দিষ্ট থাকলেও বেগের মান সর্বত্র সমান নয়। ধরা যাক, বেগের মান $v$ অতিবাহিত সময় $t$ এর উপর নির্ভর করে। সুতরাং এ বেগ $v$ সময় $t$ এর একটি অপেক্ষক এবং একে আমরা $v(t)$ রূপে প্রকাশ করি। ২·৩৪ চিত্রে $t$ এর বিভিন্ন মানের জন্য $v(t)$ এর আনুষঙ্গিক মান নিয়ে অঙ্কিত লেখ দেখানো হয়েছে।

এখন আমরা আদি সময় $t_i$ থেকে শেষ সময় $t_f$ এ সময় ব্যবধানে এ পরিবর্তনশীল বেগের জন্য অতিক্রান্ত দূরত্ব হিসাব করব। এজন্য আমরা মোট সময়কে $\Delta t$ ব্যবধানের ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র $N$ সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করি। এ অংশগুলোর প্রথমটি বিবেচনা করা যাক, যেখানে $t_i$ থেকে $t_i + \Delta t$ পর্যন্ত ক্ষুদ্র সময় ব্যবধান হচ্ছে $\Delta t$। এ ক্ষুদ্র সময় ব্যবধানকালে বেগ $v(t)$ এর মান পরিবর্তিত হলেও, সময় ব্যবধান যেহেতু খুবই ক্ষুদ্র, তাই আমরা বেগের মানের এ পরিবর্তন নগণ্য বিবেচনা করে বলতে পারি এ ক্ষুদ্র সময় ব্যবধানকালে $v(t)$ এর মান প্রায় ধ্রুব থাকে। ধরা যাক, $v(t)$ এর এ ধ্রুব মান $v_1$। সুতরাং এই সময় ব্যবধানে বস্তুর অতিক্রান্ত ক্ষুদ্র দূরত্ব $\Delta S_1$ হচ্ছে প্রায়,



চিত্র : ২.৩৪

$$\Delta S_1 = v_1 \Delta t \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2.22)$$

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় অংশে $t_i + \Delta t$ থেকে $t_i + 2\Delta t$ পর্যন্ত ক্ষুদ্র সময় ব্যবধান $\Delta t$।

ধরা যাক, $v(t)$ এর এ অংশে প্রায় ধ্রুব মান $v_2$। সুতরাং দ্বিতীয় অংশে অতিক্রান্ত দূরত্ব হবে প্রায় $\Delta S_2 = v_2 \Delta t$। সুতরাং $t_i$ থেকে $t_f$ সময় ব্যবধানে বস্তুটির অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব $S$ হবে (2.22) সমীকরণের অনুরূপ $N$ সংখ্যক পদের সমষ্টির প্রায় সমান।

সুতরাং

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \ \ldots \ + \Delta S_N$$
$$= v_1 \Delta t + v_2 \Delta t + v_3 \Delta t + \ \ldots \ + v_N \Delta t$$

$$\text{বা, } S = \sum_{k=1}^{N} v_k \Delta t \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2.23)$$

আমরা "প্রায়" শব্দটি ব্যবহার করেছি এ জন্য যে, যেকোনো ক্ষুদ্র সময় ব্যবধান $\Delta t$ কালে বেগের মান পুরোপুরি ধ্রুব থাকে না, প্রায় ধ্রুব বিবেচনা করা হয় বলে। যদি $\Delta t$ সময় কালে বেগের মান সঠিকভাবে ধ্রুব থাকত, তাহলে অবশ্যই (2.23) সমীকরণ থেকে সঠিক দূরত্ব পাওয়া যেত। সুতরাং আমরা যদি $t_i$ থেকে $t_f$ পর্যন্ত মোট সময়কে অধিক সংখ্যক অংশে বিভক্ত করি অর্থাৎ $\Delta t$ কে যত ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর তথা বিভক্ত অংশের সংখ্যা বৃহৎ থেকে বৃহত্তর করি তাহলে হিসাবকৃত দূরত্বের মান তত সঠিক দূরত্বের মানের কাছাকাছি পৌঁছাবে। আমরা অতিক্রান্ত দূরত্বের সঠিক মান পেতে পারি যদি আমরা পরিমাপের সীমার মধ্যে $\Delta t$ কে শূন্য এবং বিভক্ত অংশের সংখ্যা $N$ কে অসীম করি। তাহলে সঠিক ফল হবে,

$$S = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} v_k \Delta t \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2.24)$$

কিন্তু $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum\limits_{k=1}^{N} v_k \Delta t$ রাশিটি হচ্ছে ক্যালকুলাসের ভাষায় $\int_{t_i}^{t_f} v(t)\, dt$ যা $t_i$ থেকে $t_f$ পর্যন্ত $t$ এর সাপেক্ষে $v(t)$ এর যোগজীকরণ বা সমাকলন নির্দেশ করে।

সুতরাং (2.24) সমীকরণ দাঁড়ায়,

$$S = \int_{t_i}^{t_f} v(t)\, dt \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2.25)$$

$f(x)$-এর অনির্দিষ্ট যোগজ প্রকাশ করার জন্য $\int f(x)\, dx$ সংকেতটি ব্যবহার করা হয়। $\int f(x)\, dx$ রাশিমালায় $f(x)$ কে যোজ্য রাশি (integrand) বলে। $\int$ প্রতীকটি লম্বা S যা Summation শব্দটির প্রথম অক্ষরের দীর্ঘায়িত রূপ। $dx$ এর অর্থ হচ্ছে $f(x)$ কে $x$ এর সাপেক্ষে যোগজীকরণ করা হয়েছে।

### যোগজীকরণ বা সমাকলনের কয়েকটি সূত্র

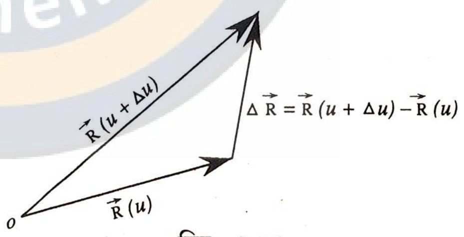
1. $\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (n \neq -1)$
2. $\int \frac{dx}{x} = \log x$
3. $\int \sin x\, dx = -\cos x$
4. $\int \cos x\, dx = \sin x$
5. $\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a} \cos ax$
6. $\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a} \sin ax$
7. $\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
8. $\int \log x\, dx = x \log x - x$

**বি. দ্র.** অন্তরীকরণ বা যোগজীকরণের বিভিন্ন সূত্রে যে $\log x$ ব্যবহার করা হয়েছে তা আসলে $e$ এর ভিত্তিতে log অর্থাৎ $\log_e x$। $e$ ভিত্তিক এ log কে অনেক সময় $ln$ দিয়েও প্রকাশ করা হয় এবং একে natural log বা স্বাভাবিক log বলা হয়।

## ২.১২। ভেক্টর ক্যালকুলাস
## Vector Calculus

### ভেক্টরের অন্তরীকরণ বা ব্যবকলন (Differentiation of Vector)

একটি ভেক্টর রাশি যে ধ্রুবক হবে এমন কোনো কথা নেই। একটি ভেক্টর রাশি অন্য স্কেলার রাশির উপর নির্ভর করতে পারে। যেমন গতিশীল বস্তুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ সময় $t$ এর উপর নির্ভর করে, অর্থাৎ অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ হচ্ছে সময় $t$ এর অপেক্ষক। তেমনিভাবে সুষম ত্বরণে গতিশীল বস্তুর বেগ $\vec{v}$ হচ্ছে সময় $t$ এর অপেক্ষক। কোনো তড়িৎ আধান কর্তৃক সৃষ্ট তড়িৎক্ষেত্রের কোনো বিন্দুর তড়িৎ প্রাবল্য আধান থেকে বিন্দুটির দূরত্বের উপর নির্ভর করে। সাধারণ স্কেলার রাশির ন্যায় ভেক্টর রাশিরও অন্তরীকরণ করা যায়। ধরা যাক, $\vec{R}$ একটি ভেক্টর যা স্কেলার রাশি $u$ এর উপর নির্ভর করে অর্থাৎ ভেক্টর রাশি $\vec{R}$ স্কেলার রাশি $u$ এর অপেক্ষক বা $\vec{R}(u)$। তাহলে




চিত্র : ২.৩৫

$$\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta u} = \frac{\vec{R}(u + \Delta u) - \vec{R}(u)}{\Delta u}$$; এখানে $\Delta u$ হলো $u$ এর বৃদ্ধি এবং $\Delta \vec{R}$ হলো $\vec{R}$ এর বৃদ্ধি (চিত্র : ২.৩৫)।

তাহলে $u$ এর সাপেক্ষে $\vec{R}$ এর অন্তরক হবে,

$$\frac{d\vec{R}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{R}(u + \Delta u) - \vec{R}(u)}{\Delta u} \qquad \dots \qquad (2.26)$$

### ভেক্টর অন্তরীকরণের কয়েকটি সূত্র

অন্তরীকরণের সাধারণ সূত্রগুলো ভেক্টর রাশির অন্তরীকরণের জন্যও প্রযোজ্য। তবে লক্ষ্য রাখতে হবে ভেক্টর রাশির অবস্থানের ক্রম (বিশেষ করে গুণের ক্ষেত্রে) যাতে বজায় থাকে অর্থাৎ দুটি ভেক্টরের ক্ষেত্রে যে ভেক্টরটি আগে থাকবে, সেটিকে আগে লিখতে হবে।

যদি কোনো স্কেলার রাশি $u$ এর সাপেক্ষে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর রাশি দুটি অন্তরীকরণযোগ্য অপেক্ষক হয় এবং যদি $u$ এর সাপেক্ষে $Q$ একটি অন্তরীকরণযোগ্য স্কেলার অপেক্ষক হয়, তাহলে

1. $\frac{d}{du}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du}$
2. $\frac{d}{du}(\vec{A}\,.\,\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du}\,.\,\vec{B} + \vec{A}\,.\,\frac{d\vec{B}}{du}$
3. $\frac{d}{du}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du}$
4. $\frac{d}{du}(Q\vec{A}) = \frac{dQ}{du}\vec{A} + Q\frac{d\vec{A}}{du}$

### ভেক্টরের যোগজীকরণ বা সমাকলন
**Integration of Vector**

ধরা যাক, $\vec{R}(u) = R_x(u)\hat{i} + R_y(u)\hat{j} + R_z(u)\hat{k}$ একটি ভেক্টর যা একটি মাত্র স্কেলার চলক $u$ এর উপর নির্ভর করে। এখানে $R_x(u)$, $R_y(u)$ এবং $R_z(u)$ হচ্ছে একটি নির্দিষ্ট ব্যবধানের মধ্যে নিরবচ্ছিন্ন। তাহলে

$\int \vec{R}(u)du = \hat{i}\int R_x(u)dx + \hat{j}\int R_y(u)dy + \hat{k}\int R_z(u)dz$ হচ্ছে $\vec{R}(u)$ এর একটি অনির্দিষ্ট যোগজ। যদি এমন একটি ভেক্টর $\vec{S}(u)$ থাকে যে,

$\vec{R}(u) = \frac{d}{du}\{(\vec{S}(u)\}$ হয়, তাহলে $\int\vec{R}(u)du = \int\frac{d}{du}\{\vec{S}(u)\}\,du = \vec{S}(u) + \vec{C}$ হবে।

এখানে $\vec{C}$ হচ্ছে স্বেচ্ছিক ধ্রুবক, যা অবশ্যই $u$ এর উপর নির্ভরশীল নয়। $u = a$ থেকে $u = b$ এর মধ্যে এর নির্দিষ্ট যোগজ হবে

$$\int_a^b \vec{R}(u)du = \int_a^b \frac{d}{du}\{\vec{S}(u)\}du = [\vec{S}(u)]_a^b = \vec{S}(b) - \vec{S}(a)$$

ভেক্টর যোগজকেও সাধারণ যোগজীকরণের ন্যায় সমষ্টি হিসেবে গণ্য করা যায়।

ভেক্টর যোগজ তিন রকমের হয়ে থাকে :

**১। রেখা যোগজ বা রেখা সমাকল (Line integrals) :** ধরা যাক, কোনো বক্ররেখা $C$ এর একটি দৈর্ঘ্য উপাদান হচ্ছে $d\vec{l}$। বক্ররেখাটি $a$ বিন্দু থেকে $b$ বিন্দু পর্যন্ত বিস্তৃত। এখন যদি $d\vec{l}$ এর উপাংশগুলো হয় $dx, dy, dz,$

অর্থাৎ যদি $d\vec{l} = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz$ হয়, তাহলে

$$\int_a^b \vec{A}.d\vec{l} = \int_a^b (A_xdx + A_ydy + A_zdz) \quad \dots \quad \dots \quad (2.27)$$

কে বলে $a$ এবং $b$ বিন্দুর মধ্যে $\vec{A}$ ভেক্টরের রেখা যোগজ।

২। **তল যোগজ বা তল সমাকল (Surface integrals) :** ধরা যাক, $d\vec{a}$ হচ্ছে কোনো তল $S$ এর একটি তল উপাদান। তাহলে,

$$\int_S \vec{A}.d\vec{a} = \int_S (A_x da_x + A_y da_y + A_z da_z) \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.28)$$

হচ্ছে $S$ তল ব্যাপী $\vec{A}$ এর তল যোগজ। তল যোগজকে $\int_S$ প্রতীক দিয়ে প্রকাশ করা হয়। এখানে $da_x$, $da_y$ এবং $da_z$ হচ্ছে $d\vec{a}$ এর উপাংশসমূহ।

৩। **আয়তন যোগজ বা আয়তন সমাকল (Volume integrals) :** ধরা যাক, $dV$ হচ্ছে কোনো আয়তন $V$ এর একটি আয়তন উপাদান। তাহলে,

$$\int_V \vec{A}dV = \hat{i}\int_V A_x dV + \hat{j}\int_V A_y dV + \hat{k}\int_V A_z dV \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.29)$$

হচ্ছে আয়তন $V$ ব্যাপী $\vec{A}$ এর আয়তন যোগজ। আয়তন যোগজকে $\int_V$ প্রতীক দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

## স্কেলার ক্ষেত্র (Scalar field)

**কোনো স্থানের কোনো এলাকা বা অঞ্চলের প্রতিটি বিন্দুতে যদি একটি স্কেলার রাশি [$\varphi(x, y, z)$] বিদ্যমান থাকে, তবে ঐ অঞ্চলকে ঐ রাশির স্কেলার ক্ষেত্র বলে।**

এখানে $\varphi(x, y, z)$ কে বলা হয় একটি স্কেলার ফাংশন এবং $\varphi$ ঐ অঞ্চলে একটি স্কেলার ক্ষেত্র নির্দেশ করে।

যেমন, ঢাকা শহরের প্রতিটি বিন্দুতে একটি তাপমাত্রা আছে। যেকোনো সময়ে এ শহরের যেকোনো বিন্দুতে তাপমাত্রা জানা যাবে। তাপমাত্রা একটি স্কেলার রাশি। তাপমাত্রাকে আমরা একটা স্কেলার ফাংশন এবং ঢাকা শহরকে তাপমাত্রার স্কেলার ক্ষেত্র বিবেচনা করতে পারি। তেমনি কোনো আহিত বস্তুর চারপাশে তড়িৎ বিভব থাকে। যেহেতু তড়িৎ বিভব স্কেলার রাশি, আমরা বলতে পারি আহিত বস্তুর চারপাশে একটি স্কেলার ক্ষেত্র বিদ্যমান।

**উদাহরণ :** $\varphi(x, y, z) = 5x^2y - 3yz$ একটি স্কেলার ক্ষেত্র নির্দেশ করে।

## ভেক্টর ক্ষেত্র (Vector field)

**কোনো স্থানের কোনো এলাকা বা অঞ্চলের প্রতিটি বিন্দুতে যদি একটি ভেক্টর রাশি [$\vec{V}(x, y, z)$] বিদ্যমান থাকে, তবে ঐ অঞ্চলকে ঐ রাশির ভেক্টর ক্ষেত্র বলে।**

এখানে $\vec{V}(x, y, z)$ কে বলা হয় একটি ভেক্টর ফাংশন এবং $\vec{V}$ ঐ অঞ্চলে একটি ভেক্টর ক্ষেত্র নির্দেশ করে। যেমন কোনো প্রবহমান তরল পদার্থের ভিতরে প্রতিটি বিন্দুতে তরলের একটি বেগ আছে। যেকোনো সময়ে তরলের যেকোনো বিন্দুতে এর বেগ জানা যায়। বেগ একটি ভেক্টর রাশি। বেগকে আমরা একটি ভেক্টর ফাংশন এবং প্রবহমান তরলকে বেগের ভেক্টর ক্ষেত্র বিবেচনা করতে পারি। তেমনি একটি আহিত বস্তুর চারপাশে তড়িৎ প্রাবল্য থাকে। যেহেতু তড়িৎ প্রাবল্য ভেক্টর রাশি, আমরা বলতে পারি আহিত বস্তুর চারপাশে একটি ভেক্টর ক্ষেত্র বিদ্যমান।

**উদাহরণ :** $\vec{V}(x, y, z) = 3xyz^2\hat{i} + 4xy^3\hat{j} - 2xz^4\hat{k}$ একটি ভেক্টর ক্ষেত্র নির্দেশ করে।

## ভেক্টর অপারেটর, $\vec{\nabla}$ (Vector operator, $\vec{\nabla}$)

ভেক্টর ক্যালকুলাসে বহুল ব্যবহৃত অপারেটরটি হচ্ছে $\vec{\nabla}$ (ডেল)। স্যার হ্যামিলটন এটি আবিষ্কার করেন। আগে এটি নাবলা নামে পরিচিত ছিল। এটি একটি ভেক্টর অপারেটর। $\vec{\nabla}$ হচ্ছে,

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2.30)$$

ভেক্টর অপারেটরের সাহায্যে তিনটি রাশি তৈরি করা হয় যেগুলো পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন সূত্র ও তত্ত্ব ব্যাখ্যা করতে খুবই প্রয়োজন হয়। এগুলো হচ্ছে গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স ও কার্ল।

### গ্রেডিয়েন্ট (Gradient)

যদি কোনো স্থানের একটি এলাকায় প্রতিটি বিন্দুতে $\varphi(x, y, z)$কে একটি অন্তরীকরণযোগ্য রাশি হিসেবে সংজ্ঞায়িত করা যায় অর্থাৎ $\varphi$ যদি একটি অন্তরীকরণযোগ্য স্কেলার অপেক্ষক হয়, তাহলে এর গ্রেডিয়েন্ট বা grad $\varphi$ বা $\vec{\nabla}\varphi$ এর সংজ্ঞা হলো :

$$\vec{\nabla}\varphi = \left(\hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi$$

$$\therefore\ \vec{\nabla}\varphi = \hat{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2.31)$$

এটি একটি ভেক্টর রাশি। এর মান অবস্থানের সাপেক্ষে ঐ স্কেলার রাশির সর্বোচ্চ বৃদ্ধিহার নির্দেশ করে। তাছাড়া এ বৃদ্ধিহারের দিকই হবে স্কেলার রাশিটির গ্রেডিয়েন্টের দিক। **স্কেলার ক্ষেত্র থেকে ভেক্টর ক্ষেত্রে উত্তরণের কৌশলই হচ্ছে স্কেলার রাশির গ্রেডিয়েন্ট নির্ণয় করা।** গ্রেডিয়েন্ট হলো বিভিন্ন অক্ষের সাপেক্ষে কোনো স্কেলার ফাংশনের ঢাল।

### ডাইভারজেন্স (Divergence)

যদি কোনো স্থানের একটি এলাকায় প্রতিটি বিন্দুতে $\vec{V}(x, y, z) = \hat{i}V_x + \hat{j}V_y + \hat{k}V_z$ কে একটি অন্তরীকরণযোগ্য রাশি হিসেবে সংজ্ঞায়িত করা যায় অর্থাৎ $\vec{V}$ যদি একটি অন্তরীকরণযোগ্য ভেক্টর অপেক্ষক হয়, তাহলে $\vec{V}$ এর ডাইভারজেন্স (div $\vec{V}$) বা $\vec{\nabla}.\vec{V}$ এর সংজ্ঞা হলো :

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \left(\hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right).(\hat{i}V_x + \hat{j}V_y + \hat{k}V_z)$$

$$\text{বা, } \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2.32)$$

লক্ষ্যণীয় যে, ডাইভারজেন্স $\vec{V}$ হচ্ছে $\vec{\nabla}$ এবং $\vec{V}$ এর ডট বা স্কেলার গুণফল এবং এটি একটি স্কেলার রাশি। **ডাইভারজেন্সের মাধ্যমে একটি ভেক্টর ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্রে রূপান্তর করা যায়।** উল্লেখ্য যে, $\vec{A}\,.\,\vec{B} = \vec{B}\,.\,\vec{A}$ হলেও কোনোভাবেই $\vec{\nabla}\,.\,\vec{V} = \vec{V}\,.\,\vec{\nabla}$ হবে না। কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে কোনো প্রবাহীর ডাইভারজেন্স ধনাত্মক হলে বুঝতে হবে, হয় প্রবাহীটি প্রসারিত হচ্ছে অর্থাৎ এর ঘনত্ব হ্রাস পাচ্ছে অথবা বিন্দুটি প্রবাহীটির একটি উৎস।

আবার ডাইভারজেন্স ঋণাত্মক হলে, হয় প্রবাহীটি সঙ্কুচিত হচ্ছে অর্থাৎ ঐ বিন্দুতে এর ঘনত্ব বৃদ্ধি প্রাপ্ত হচ্ছে বা বিন্দুটি একটি ঋণাত্মক উৎস বা সিঙ্ক।

আবার কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স শূন্য হলে ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রকে সলিনয়ডাল বলে। অর্থাৎ এক্ষেত্রে ঐ বিন্দুতে যে পরিমাণ প্রবাহী প্রবেশ করে ঠিক সেই পরিমাণ প্রবাহী বেরিয়েও যাবে। অর্থাৎ এক্ষেত্রে div $\vec{V} = 0$

### কার্ল (Curl)

যদি কোনো স্থানের একটি এলাকায় প্রতিটি বিন্দুতে $\vec{V}(x, y, z) = \hat{i}V_x + \hat{j}V_y + \hat{k}V_z$ কে একটি অন্তরীকরণযোগ্য রাশি হিসেবে সংজ্ঞায়িত করা যায় অর্থাৎ $\vec{V}$ যদি একটি অন্তরীকরণযোগ্য ভেক্টর অপেক্ষক হয়, তাহলে $\vec{V}$ এর কার্ল

(curl $\vec{V}$) বা $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ এর সংজ্ঞা হলো :

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\hat{i}V_x + \hat{j}V_y + \hat{k}V_z)$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\hat{k} \quad \ldots \quad (2.33)$$

কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি। এ ভেক্টরটির দিক ঐ ক্ষেত্রের উপর অঙ্কিত লম্ব বরাবর। এটি ঐ ক্ষেত্রের ঘূর্ণন ব্যাখ্যা করে। কোনো বিন্দুর চারদিকে ভেক্টরটি কতবার ঘোরে কার্ল তা নির্দেশ করে। যদি কোনো ভেক্টরের কার্ল শূন্য হয় তবে এটি অঘূর্ণনশীল (irrotational) হবে। অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}$ হলে $\vec{V}$ ক্ষেত্রটি অঘূর্ণনশীল এবং সংরক্ষণশীল আর $\vec{\nabla} \times \vec{V} \neq \vec{0}$ হলে $\vec{V}$ ক্ষেত্রটি ঘূর্ণনশীল এবং অসংরক্ষণশীল। রৈখিক বেগ $\vec{v}$ এর কার্ল কৌণিক বেগ $\vec{\omega}$ এর দ্বিগুণ, অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 2\vec{\omega}$। কোনো ভেক্টরের কার্লের মান ঐ ভেক্টরের ক্ষেত্রে একক ক্ষেত্রফলের উপর সর্বোচ্চ রেখা যোগজের সমান। কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্লের ডাইভারজেন্স শূন্য অর্থাৎ $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$।

## সমস্যা সমাধানে প্রয়োজনীয় সমীকরণসমূহ

| ক্রমিক নং | সমীকরণ নং | সমীকরণ | অনুচ্ছেদ |
|---|---|---|---|
| ১ | 2.1 | $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ | ২.৫ |
| ২ | 2.2 | $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ | ২.৫ |
| ৩ | 2.3 | $X = R\cos\alpha$ | ২.৬ |
| ৪ | 2.4 | $Y = R\sin\alpha$ | ২.৬ |
| ৫ | 2.7 | $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ | ২.৭ |
| ৬ | 2.8 | $\hat{a} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$ | ২.৭ |
| ৭ | 2.9 | $\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_y)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$ | ২.৭ |
| ৮ | 2.14 | $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$ | ২.৯ |
| ৯ | 2.15 | $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ | ২.৯ |
| ১০ | 2.17 | $C = \lvert\vec{A} \times \vec{B}\rvert = AB\sin\theta$ | ২.১০ |
| ১১ | 2.18 | $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$ | ২.১০ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ১২ | 2.21 | $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$ | ২.১০ |
| ১৩ | 2.31 | $\vec{\nabla}\varphi = \hat{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ | ২.১২ |
| ১৪ | 2.32 | $\vec{\nabla}\,.\,\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$ | ২.১২ |
| ১৫ | 2.33 | $\vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$ | ২.১২ |

## সার-সংক্ষেপ

**ভেক্টর রাশি :** যে সকল ভৌত রাশিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য মান ও দিক উভয়ের প্রয়োজন হয় তাদেরকে ভেক্টর রাশি বলে।

**স্কেলার রাশি :** যে সকল ভৌত রাশিকে শুধু মান দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়, দিক নির্দেশের প্রয়োজন হয় না তাদেরকে স্কেলার রাশি বলে।

**সমান ভেক্টর :** সমজাতীয় দুটি ভেক্টরের মান যদি সমান হয় আর তাদের দিক যদি একই দিকে হয় তবে তাদেরকে সমান ভেক্টর বলে।

**ঋণাত্মক বা বিপরীত ভেক্টর :** নির্দিষ্ট দিক বরাবর কোনো ভেক্টরকে ধনাত্মক ধরলে তার বিপরীত দিকে সমমানের সমজাতীয় ভেক্টরকে ঋণাত্মক ভেক্টর বা বিপরীত ভেক্টর বলে।

**নাল ভেক্টর :** যে ভেক্টরের মান শূন্য তাকে নাল ভেক্টর বলে।

**একক ভেক্টর :** কোনো ভেক্টরের মান যদি একক হয় তবে তাকে একক ভেক্টর বলে।

**আয়ত একক ভেক্টর :** ত্রিমাত্রিক কার্টেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার তিনটি ধনাত্মক অক্ষ বরাবর যে তিনটি একক ভেক্টর বিবেচনা করা হয় তাদেরকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

**অবস্থান ভেক্টর :** প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দিয়ে নির্দেশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

**সরণ ভেক্টর :** কোনো বস্তুর অবস্থান ভেক্টরের পরিবর্তনকে সরণ ভেক্টর বলে।

**ভেক্টর যোগের সামান্তরিকের সূত্র :** যদি একটি সামান্তরিকের কোনো কৌণিক বিন্দু থেকে অঙ্কিত দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা কোনো কণার উপর এককালীন ক্রিয়াশীল একই জাতীয় দুটি ভেক্টরের মান ও দিক নির্দেশ করা যায়, তাহলে ঐ বিন্দু থেকে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণটি ভেক্টর দুটির মিলিত ফলের বা লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

**ভেক্টরের বিভাজন :** একটি ভেক্টরকে দুই বা ততোধিক রাশিতে বিভক্ত করার পদ্ধতিকে ভেক্টরের বিভাজন বলে।

**উপাংশ :** একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করলে বিভক্ত অংশগুলোকে মূল ভেক্টরের উপাংশ বলে।

**স্কেলার গুণফল বা ডট গুণফল :** দুটি ভেক্টরের গুণনে যদি একটি স্কেলার রাশি পাওয়া যায় তবে ভেক্টরদ্বয়ের মানও এদের মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতর কোণের cosine-এর গুণফলকে স্কেলার গুণফল বলে।

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

**ভেক্টর গুণফল বা ক্রস গুণফল :** দুটি ভেক্টরের গুণনে যদি একটি ভেক্টর রাশি পাওয়া যায় তবে ভেক্টর গুণফলের মান হবে ভেক্টর দুটির মান ও এদের মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতর কোণের sine-এর গুণফলের সমান এবং দিক হবে উভয় ভেক্টরের সমতলে লম্বভাবে স্থাপিত একটি ডানহাতি স্ক্রুকে প্রথম ভেক্টর থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে যে দিকে অগ্রসর হবে সে দিকে।

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{n} AB \sin\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

**অপারেটর :** যে গাণিতিক ক্রিয়া একটি রাশিকে অন্য রাশিতে রূপান্তরিত করে তাকে অপারেটর বলে।

**ভেক্টর অপারেটর,** $\vec{\nabla}$ : $\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$

**গ্রেডিয়েন্ট :** $\varphi$ এর গ্রেডিয়েন্ট $= \text{grad } \varphi = \vec{\nabla}\varphi = \hat{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}$

**ডাইভারজেন্স :** $\vec{V}$ এর ডাইভারজেন্স $= \text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

**কার্ল :** $\vec{V}$ এর কার্ল $= \text{Curl } \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_x \end{vmatrix}$

## গাণিতিক উদাহরণ

### সেট I

### [সাধারণ সমস্যাবলি]

**গাণিতিক উদাহরণ ২.১।** 20 N এবং 60 N মানের দুটি ভেক্টর রাশির মধ্যকার কোণ 30°। রাশি দুটির লব্ধির মান বের কর।

আমরা জানি,

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$= (20\text{ N})^2 + (60\text{ N})^2 + 2 \times 20\text{ N} \times 60\text{ N} \times \cos 30°$

$= [400 + 3600 + 2 \times 20 \times 60 \times 0{\cdot}866]\ \text{N}^2$

$\therefore R = \sqrt{6078{\cdot}4}\ \text{N}$

$= 77{\cdot}96\ \text{N}$

এখানে,
প্রথম রাশির মান, $P = 20$ N
দ্বিতীয় রাশির মান, $Q = 60$ N
মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 30°$
লব্ধির মান, $R = ?$

উ: 77·96 N

**গাণিতিক উদাহরণ ২.২। একটি বস্তুকে 50 N বল দ্বারা পূর্বদিকে এবং 20 N বল দ্বারা পূর্বদিকের সাথে 60° কোণ করে উত্তরে টানা হলো। লব্ধি বলের মান ও দিক নির্ণয় কর।**

এখানে,
প্রথম বলের মান, $P = 50$ N
দ্বিতীয় বলের মান, $Q = 20$ N
বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 60°$
লব্ধির মান, $R = ?$

আমরা জানি,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$$
$$= (50\text{ N})^2 + (20\text{ N})^2 + 2 \times 50\text{ N} \times 20\text{ N} \times \cos 60°$$
$$= [2500 + 400 + 2 \times 50 \times 20 \times 0.5]\text{ N}^2$$
$$= 3900\text{ N}^2$$
$$\therefore R = 62.45\text{ N}$$

লব্ধি $R$ যদি $P$ এর সাথে অর্থাৎ পূর্বদিকের সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে, তাহলে আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

বা, $\tan\theta = \dfrac{20\text{ N} \times \sin 60°}{50\text{ N} + 20\text{ N} \times \cos 60°} = 0.2886$

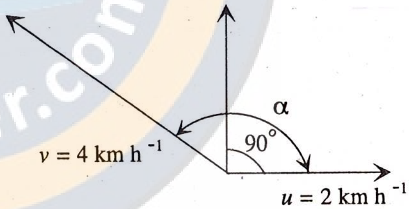
$$\therefore \theta = \tan^{-1}(0.2886) = 16.1°$$

উ: 62.45 N পূর্বদিকের সাথে 16.1° কোণে উত্তর দিকে।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.৩। স্রোত না থাকলে একজন সাঁতারু 4 km h$^{-1}$ বেগে সাঁতার কাটতে পারেন। 2 km h$^{-1}$ বেগে সরলরেখা বরাবর প্রবাহিত একটি নদীর এপার থেকে ওপারের ঠিক বিপরীত বিন্দুতে যেতে হলে সাঁতারুকে কোন্ দিকে সাঁতার কাটতে হবে?**

ধরা যাক, স্রোতের বেগ $u$ এবং সাঁতারুর বেগ $v$ এবং বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha$। নদীটিকে সোজাসুজি অতিক্রম করতে সাঁতারুর লব্ধি বেগ $R$ স্রোতের বেগ $u$ এর সাথে $\theta = 90°$ কোণ তৈরি করতে হবে।

এখানে,
$u = 2$ km h$^{-1}$
$v = 4$ km h$^{-1}$
$\theta = 90°$
$\alpha = ?$




আমরা জানি, $\tan\theta = \dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

এ সমীকরণে মান বসিয়ে,

$$\tan 90° = \frac{(4\text{ km h}^{-1})\sin\alpha}{2\text{ km h}^{-1} + (4\text{ km h}^{-1})\cos\alpha}$$

কিন্তু $\tan 90° = \infty \quad \therefore \infty = \dfrac{4\sin\alpha}{2 + 4\cos\alpha}$

বা, $2 + 4\cos\alpha = 0 \quad \left[\because \dfrac{\text{যে কোনো সংখ্যা}}{0} = \infty\right]$

বা, $4\cos\alpha = -2$

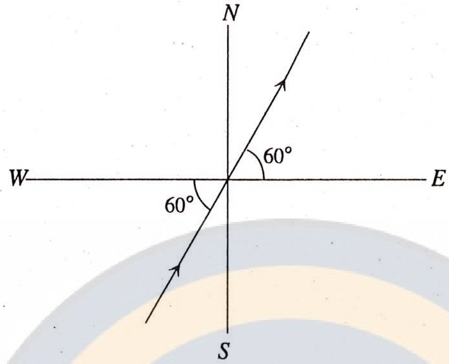
বা, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \alpha = 120°$$

উ: সাঁতারুকে স্রোতের সাথে 120° কোণে সাঁতার কাটতে হবে।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.৪। কোনো স্থানে বাতাস 20 km $h^{-1}$ বেগে পশ্চিম দিকের সাথে 60° কোণে দক্ষিণ দিক থেকে বইছে। বাতাসের বেগের উত্তরমুখী ও পূর্বমুখী উপাংশের মান কত?**

বাতাস পশ্চিম দিকের সাথে 60° কোণে দক্ষিণ দিক থেকে বইছে, অর্থাৎ পূর্বদিকের সাথে 60° কোণ করে উত্তর দিকে বইছে।




আমরা জানি,

$v_E = v \cos\theta$

$= (20 \text{ km h}^{-1}) \cos 60°$

$= 10 \text{ km h}^{-1}$

$v_N = v \sin\theta$

$= (20 \text{ km h}^{-1}) \sin 60°$

$= 17.32 \text{ km h}^{-1}$

এখানে,

বাতাসের বেগ, $v = 20 \text{ km h}^{-1}$

পূর্বদিকের সাথে বেগের কোণ, $\theta = 60°$

বেগের পূর্বমুখী উপাংশ, $v_E = ?$

বেগের উত্তরমুখী উপাংশ, $v_N = ?$

উ: উত্তরমুখী উপাংশ 17.32 km $h^{-1}$ এবং পূর্বমুখী উপাংশ 10 km $h^{-1}$।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.৫। $\vec{r_1} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ ও $\vec{r_2} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।**

লব্ধি ভেক্টর,

$\vec{R} = \vec{r_1} + \vec{r_2}$

$= 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k} + \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$= 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{R}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর

$$\hat{r} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

এখানে,

$\vec{r_1} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$

$\vec{r_2} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

একক ভেক্টর, $\hat{r} = ?$

কিন্তু $|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$

বা, $|\vec{R}| = \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{9 + 36 + 4}$

$= \sqrt{49} = 7$

$\therefore \hat{r} = \dfrac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{7} = \dfrac{3}{7}\hat{i} + \dfrac{6}{7}\hat{j} - \dfrac{2}{7}\hat{k}$

উ: $\dfrac{3}{7}\hat{i} + \dfrac{6}{7}\hat{j} - \dfrac{2}{7}\hat{k}$

**গাণিতিক উদাহরণ ২.৬। যদি $\vec{A} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ হয় তবে $\vec{A}.\vec{B}$ নির্ণয় কর।**

এখানে,

$\vec{A} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{B} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{A}.\vec{B} = ?$

আমরা জানি,

$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

$= 6 \times 2 + (-3) \times 2 + 2 \times 1$

$= 12 - 6 + 2$

$= 8$

উ: 8.

**গাণিতিক উদাহরণ ২.৭। $\vec{P} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।** [বুয়েট ২০১৭–২০১৮ ; ঢা. বি. ২০০৯–২০১০]

এখানে,

$\vec{P} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$

$\vec{Q} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = ?$

আমরা জানি,

$\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\theta$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\vec{P}.\vec{Q}}{PQ}$

কিন্তু $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} = \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{45}$

এবং $Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2} = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$

এবং $\vec{P}.\vec{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$

$= (2)(1) + (4)(2) + (-5)(3)$

$= 2 + 8 - 15 = -5$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{-5}{\sqrt{45} \times \sqrt{14}} = -0.1992$

$\therefore \theta = \cos^{-1}(-0.1992) = 101.49°$

উ: 101.49°

**গাণিতিক উদাহরণ ২.৮।** $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}$ । $m$ এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব হবে? [ঢা. বি. ২০০৮–২০০৯]

এখানে,

$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

$\vec{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}$

$m = ?$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পরের উপর লম্ব হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90^\circ$ হবে।

অর্থাৎ $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos 90^\circ = 0$ হবে।

এখানে, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

কিন্তু, $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

$$= 2 \times m + 3 \times 2 + (-5) \times 10$$

$$= 2m + 6 - 50$$

সুতরাং $2m + 6 - 50 = 0 \quad \therefore m = 22$

উ: 22

**গাণিতিক উদাহরণ ২.৯।** দেখাও যে, $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 5\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্তরাল। [ঢা. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০১০]

এখানে,

$\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{B} = 5\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে, এদের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 0^\circ$ হবে।

অর্থাৎ $\vec{A} \times \vec{B} = \hat{n} AB \sin 0^\circ = \vec{0}$ হবে।

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}(5-5) - \hat{j}(5-5) + \hat{k}(5-5) = \vec{0}$$

$\because \vec{A} \times \vec{B} = \vec{0} \quad \therefore \vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.১০।** যদি $\vec{P} = 2\hat{i} + m\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 10\hat{i} - 5\hat{j} - 15\hat{k}$ পরস্পর সমান্তরাল হয় তবে $m$-এর মান নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১০; কু. বো. ২০১১]

এখানে,

$\vec{P} = 2\hat{i} + m\hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{Q} = 10\hat{i} - 5\hat{j} - 15\hat{k}$

$m = ?$

$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে, এদের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 0^\circ$ হবে।

অর্থাৎ $\vec{P} \times \vec{Q} = \hat{n} PQ \sin \theta = \vec{0}$ হবে।

এখন, $$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & m & -3 \\ 10 & -5 & -15 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-15m - 15) + \hat{j}(-30 + 30) + \hat{k}(-10 - 10m)$$

$$= \hat{i}(-15m - 15) + \hat{k}(-10 - 10m)$$

সুতরাং, $\hat{i}(-15m - 15) + \hat{k}(-10 - 10m) = \vec{0}$

এখন $\hat{i}$ এবং $\hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে অর্থাৎ সমীকরণের দুই পাশের সহগ সমান বিবেচনা করে।

$-15\,m - 15 = 0$ বা, $m = -1$

$-10 - 10\,m = 0$ বা, $m = -1$

উ: $m = -1$

**গাণিতিক উদাহরণ ২.১১। $\vec{P} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$, $\vec{Q} = -2\hat{i} + 5\hat{k}$, $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ দ্বারা একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশিত হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [রা. বো. ২০১২]

আমরা জানি, দুটি ভেক্টর কোনো একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে ঐ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল হবে ভেক্টর দুটির ক্রস গুণফলের মানের সমান।

অর্থাৎ $|\vec{P} \times \vec{Q}|$ = সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

এখানে,

$\vec{P} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$

$\vec{Q} = -2\hat{j} + 5\hat{k}$

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল, $|\vec{P} \times \vec{Q}| = ?$

এখন, $\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(15 - 0) - \hat{j}(20 - 0) + \hat{k}(-8 - 0) = 15\hat{i} - 20\hat{j} - 8\hat{k}$

$\therefore |\vec{P} \times \vec{Q}| = \sqrt{(15)^2 + (-20)^2 + (-8)^2} = 26.25$

উ: 26.25 একক।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.১২। একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যার কর্ণ দুটি যথাক্রমে**

**$\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$** [কু. বো. ২০১২]

আমরা জানি, দুটি ভেক্টর কোনো একটি সামান্তরিকের দুটি কর্ণ নির্দেশ করলে ঐ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল হবে ভেক্টর দুটির ক্রস গুণফলের মানের অর্ধেক।

অর্থাৎ $\frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$ = সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

এখানে,

$\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল, $\frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}| = ?$

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(4 - 6) - \hat{j}(12 + 2) + \hat{k}(-9 - 1) = -2\hat{i} - 14\hat{j} - 10\hat{k}$

$\therefore \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (-14)^2 + (-10)^2}$

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{300} = 8.66$

উ: 8.66 একক।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.১৩।** $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$ ; $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় একটি ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত?

আমরা জানি, দুটি ভেক্টর কোনো একটি ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে ঐ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হবে, ভেক্টর দুটির ক্রস গুণফলের মানের অর্ধেক।

অর্থাৎ $\frac{1}{2}\,|\vec{A} \times \vec{B}|$ = ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

এখানে,
$\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$
$\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$
ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $\frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}| = ?$

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}\,(15-1) - \hat{j}\,(20-2) + \hat{k}\,(4-6) = 14\hat{i} - 18\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore \frac{1}{2} \times |\vec{A} \times \vec{B}| = \frac{1}{2} \times \sqrt{(14)^2 + (-18)^2 + (-2)^2} = 11.45$

উ: 11.45 একক।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.১৪।** যদি $\varphi(x, y, z) = 3xy^2z^3 - 4xy$ হয় তবে $\vec{\nabla}\varphi$ (grad $\varphi$) বের কর। **(2, –1, 1)** বিন্দুতে $\vec{\nabla}\varphi$ কত হবে?

এখানে $\varphi(x, y, z) = 3xy^2z^3 - 4xy$

আমরা জানি,

$$\vec{\nabla}\varphi = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(3xy^2z^3 - 4xy)$$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(3xy^2z^3 - 4xy) + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(3xy^2z^3 - 4xy) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(3xy^2z^3 - 4xy)$$

$$\therefore \vec{\nabla}\varphi = (3y^2z^2 - 4y)\,\hat{i} + (6xyz^3 - 4x)\,\hat{j} + (9xy^2z^2)\,\hat{k}$$

এখন (2, –1, 1) বিন্দুতে

$$\vec{\nabla}\varphi = \{3 \times (-1)^2 \times 1^2 - 4\times(-1)\}\hat{i} + \{6\times 2\times(-1)\times 1^3 - 4\times 2\}\hat{j} + (9\times 2\times(-1)^2\times 1^2\}\hat{k}$$

$$= 7\hat{i} - 20\hat{j} + 18\hat{k}$$

**গাণিতিক উদাহরণ ২.১৫।** যদি $\vec{A} = (3x^2z)\,\hat{i} + (xyz^2)\,\hat{j} - (x^3y^2z)\hat{k}$ হয় তবে

**(ক)** $\vec{\nabla}.\vec{A}$ এবং $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ নির্ণয় কর।

**(খ) (1, –1, 1)** বিন্দুতে $\vec{\nabla}.\vec{A}$ এবং $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ কত?

এখানে $\vec{A} = (3x^2z)\hat{i} + (xyz^2)\hat{j} - (x^3y^2z)\hat{k}$

আমরা জানি,

(ক) $\vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right)$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\,(3x^2z\hat{i} + xyz^2\hat{j} - x^3y^2z\hat{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2z) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^3y^2z)$$

$$= 6xz + xz^2 - x^3y^2$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & Ay & Az \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 z & xyz^2 & -x^3y^2z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(-x^3y^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz^2)\right\} + \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(3x^2z) - \frac{\partial}{\partial x}(-x^3y^2z)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(xyz^2) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2z)\right\}$$

$$= \hat{i}(-2x^3yz - 2xyz) + \hat{j}(3x^2 + 3x^2y^2z) + \hat{k}(yz^2)$$

$$= 2(-x^3yz - xyz)\hat{i} + 3(x^2 + x^2y^2z)\hat{j} + (yz^2)\hat{k}$$

এখন (1, –1, 1) বিন্দুতে

(খ) $\vec{\nabla}.\vec{A} = 6\times1\times1 + 1\times1^2 - 1^3\times(-1)^2 = 6$

এবং $\vec{\nabla}\times\vec{A} = 2\times\{-1^3\times(-1)\times1 - 1\times(-1)\times1\}\hat{i} + 3\times\{1^2 + 1^2\times(-1)^2\times1\}\hat{j}$

$$+ \{(-1)\times1^2\}\hat{k}$$

$$= 4\hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k}$$

## সেট II

**[সাম্প্রতিক বোর্ড পরীক্ষা ও বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষায় সন্নিবেশিত সমস্যাবলি]**

**গাণিতিক উদাহরণ ২.১৬। দেওয়া আছে, $\vec{r} = \hat{i}\cos 5t + \hat{j}\sin 5t$। দেখাও যে, $\vec{r}$ ভেক্টরের ক্ষেত্রটি সলিনয়ডাল।** [ঢা. বো. ২০১৫]

আমরা জানি, কোনো ভেক্টর ক্ষেত্র সলিনয়ডাল হবে যদি এর ডাইভারজেন্স শূন্য হয় অর্থাৎ $\vec{\nabla}.\vec{r} = 0$ হলে।

এখানে, $\vec{\nabla} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$

দেখাতে হবে, $\vec{\nabla}.\vec{r} = 0$

এখন,

$$\vec{\nabla}.\vec{r} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k}\right)$$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).(\hat{i}\cos 5t + \hat{j}\sin 5t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\cos 5t + \frac{\partial}{\partial y}\sin 5t + \frac{\partial}{\partial z}\times 0$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

$\because \vec{\nabla}.\vec{r} = 0$

$\therefore \vec{r}$ ভেক্টর ক্ষেত্রটি সলিনয়ডাল।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.১৭।** অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় কর।

[কু. বো. ২০১৫]

এখানে, $\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + 2\hat{k}$

আমরা জানি, অবস্থান ভেক্টর এর ডাইভারজেন্স হচ্ছে

$\vec{\nabla}.\vec{r}$

$$\therefore \vec{\nabla}.\vec{r} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).(x\hat{i} + y\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial (2)}{\partial z} = 1 + 1 + 0 = 2$$

উ: 2

**গাণিতিক উদাহরণ ২.১৮।** অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ হলে দেখাও যে, $\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3$

এখানে,

অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$

$\vec{\nabla}.\vec{r} = ?$

আমরা জানি,

$$\therefore \vec{\nabla}.\vec{r} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\therefore \vec{\nabla}.\vec{r} = 3$$

সুতরাং প্রমাণিত।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.১৯।** অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে দেখাও যে, ভেক্টর $\vec{r}$ সলিনয়ডাল।

এখানে,

অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$

দেখাতে হবে যে, $\text{div}\,\vec{r} = 0$

আমরা জানি, কোনো ভেক্টরের ডাইভারজেন্স শূন্য হলে ভেক্টরটি সলিনয়ডাল।

$$\therefore \text{div}\,\vec{r} = \vec{\nabla}.\vec{r} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).(2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \frac{\partial (2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(3) + \frac{\partial}{\partial z}(2) = 0 + 0 + 0$$

$\because \text{div}\,\vec{r} = 0$

$\therefore \vec{r}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.২০।** দেখাও যে, $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = \vec{0}$

এখানে,

$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$

$\vec{\nabla}\varphi = \hat{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}$

$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = ?$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right] + \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right]$$

$$= \hat{i} \times 0 + \hat{j} \times 0 + \hat{k} \times 0 = \vec{0}$$

সুতরাং প্রমাণিত

**গাণিতিক উদাহরণ ২.২১।** **দেওয়া আছে $\vec{r} = \hat{i} \cos 5t + \hat{j} \sin 5t$। দেখাও যে, $\vec{r}$ ভেক্টর ক্ষেত্রটি অঘূর্ণনশীল।** [ঢা. বো. ২০১৫]

আমরা জানি, কোনো ভেক্টর ক্ষেত্র অঘূর্ণনশীল হয় যদি এর কার্ল শূন্য হয় অর্থাৎ যখন $\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0}$

এখানে, $\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$

$\vec{r} = \hat{i} \cos 5t + \hat{j} \sin 5t$

$\vec{\nabla} \times \vec{r} = ?$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cos 5t & \sin 5t & 0 \end{vmatrix}$$

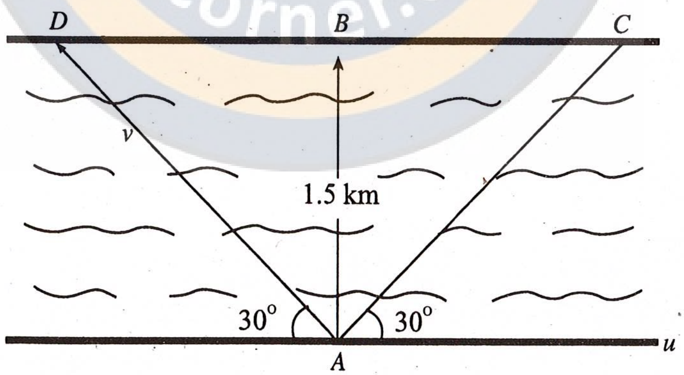
$$= \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y} \times 0 - \frac{\partial}{\partial z}(\sin 5t)\right] + \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(\cos 5t) - \frac{\partial}{\partial x} \times 0\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\sin 5t) - \frac{\partial}{\partial y}(\cos 5t)\right]$$

$$= \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

$\because \vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0}$

$\therefore \vec{r}$ ভেক্টর ক্ষেত্রটি অঘূর্ণনশীল।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.২২।** **চিত্রে প্রবাহমান নদীর প্রস্থ 1.5 km এবং স্রোতের বেগ 4 km h$^{-1}$। রহমত মাঝি *AB* বরাবর নৌকা চালনা করে *AC* বরাবর ওপারে পৌঁছালেন। নৌকার বেগ 3 km h$^{-1}$**




**(ক) *AC* বরাবর নৌকার অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।**

**(খ) *AD* বরাবর নৌকা চালিয়ে রহমত মাঝি কী *B* বিন্দুতে পৌঁছাতে পারবেন? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক তোমার মতামত দাও।** [ঢা. বো. ২০১৫]

(ক) আমরা জানি,

$$\cos \angle BAC = \frac{AB}{AC}$$

এখানে

$AB = 1.5$ km

$AC = ?$

$\therefore AC = \dfrac{AB}{\cos \angle BAC}$

কিন্তু, চিত্রানুসারে $\angle BAC = 90° - 30° = 60°$

$\therefore AC = \dfrac{1.5 \text{ km}}{\cos 60°} = 3 \text{ km}$

(খ) মাঝি $AB$ বরাবর ওপারে পৌঁছাতে হলে নৌকা ও স্রোতের লব্ধি বেগ $R$ স্রোতবেগ $u$ এর সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করতে হবে।

লব্ধি বেগ $R$ যদি স্রোতের বেগ $u$ এর সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে তাহলে,

এখানে,
স্রোতের বেগ, $u = 4 \text{ km h}^{-1}$
নৌকার বেগ, $v = 3 \text{ km h}^{-1}$
স্রোতের বেগ ও নৌকার বেগের অন্তর্ভুক্ত কোণ, $\alpha = 180° - 30° = 150°$

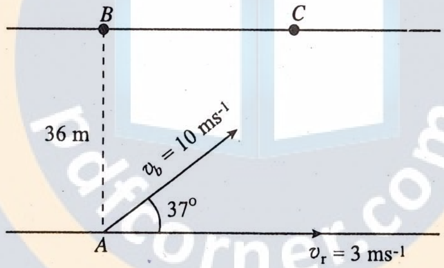
$$\tan\theta = \frac{v \sin\alpha}{u + v\cos\alpha} = \frac{(3 \text{ km h}^{-1}) \times \sin 150°}{(4 \text{ km h}^{-1}) + (3 \text{ km h}^{-1}) \times \cos 150°}$$

$\therefore \theta = \tan^{-1}(1.07) = 46.94°$

যেহেতু লব্ধি 90° এর চেয়ে কম কোণ উৎপন্ন করে, সুতরাং মাঝি $AD$ বরাবর নৌকা চালিয়ে $B$ বিন্দুতে পৌঁছাতে পারবেন না।

উ: (ক) 3 km; (খ) পারবেন না।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.২৩। 36 m চওড়া একটি নদীতে 10 m s$^{-1}$ বেগে একটি নৌকা চলছে (চিত্র)। নৌকাটি নদী পার হয়ে বিপরীত তীরের $C$ বিন্দুতে পৌঁছাল। নদীতে স্রোতের বেগ 3 m s$^{-1}$।**




**(ক) নদীর বিপরীত পাড়ের $BC$ দূরত্ব কত?**

**(খ) নদীর বিপরীত পাড়ের $B$ বিন্দুতে নৌকাটিকে পৌঁছাতে হলে কী ব্যবস্থা নিতে হবে?** [কু. বো. ২০১৫]

এখানে,
নৌকার বেগ, $v_b = 10 \text{ m s}^{-1}$
স্রোতের বেগ, $v_r = 3 \text{ m s}^{-1}$
নৌকা ও স্রোতের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 37°$
নদীর বিস্তার বা প্রস্থ, $d = 36$ m
নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময়, $t = ?$
দূরত্ব, $BC = ?$

(ক) নদীর বিস্তার বরাবর নৌকার বেগের উপাংশ

$= v_b \sin 37°$
$= 10 \text{ m s}^{-1} \times \sin 37° = 6.02 \text{ m s}^{-1}$

$\therefore$ নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময়, $t = \dfrac{d}{0.602 \text{ m s}^{-1}}$

$= \dfrac{36 \text{ m}}{6.02 \text{ m s}^{-1}} = 5.982 \text{ s}$

নদীর তীর বরাবর নৌকার বেগের উপাংশ $= v_b \cos 37°$

$= 10 \text{ m s}^{-1} \times \cos 37°$
$= 7.986 \text{ m s}^{-1}$

$\therefore$ নদীর তীর বরাবর নৌকার লব্ধি বেগ, $v = v_b \cos 37° + v_r$

$= 7.986 \text{ m s}^{-1} + 3 \text{ m s}^{-1} = 10.986 \text{ m s}^{-1}$

$\therefore$ দূরত্ব, $BC = vt = 10.986 \text{ m s}^{-1} \times 5.982 \text{ s} = 65.72 \text{ m}$

(খ) নদীর বিপরীত পাশে সোজাসুজি পৌঁছাতে হলে নৌকার লব্ধি বেগ $R$ স্রোত বেগ $v_r$ এর সাথে $\theta = 90^\circ$ কোণ তৈরি করতে হবে। ধরা যাক, এই অবস্থায় স্রোতের বেগ $v_r$ এবং নৌকার বেগ $v_b$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha$।

এখানে,
স্রোতের বেগ, $v_r = 3 \text{ m s}^{-1}$
নৌকার বেগ, $v_b = 10 \text{ m s}^{-1}$
$\theta = 90^\circ$
$\alpha = ?$

সুতরাং $\tan\theta = \dfrac{v_b \sin\alpha}{v_r + v_b \cos\alpha}$

বা, $\tan 90^\circ = \dfrac{(10 \text{ m s}^{-1}) \sin\alpha}{3 \text{ m s}^{-1} + (10 \text{ m s}^{-1}) \cos\alpha}$

বা, $\infty = \dfrac{10 \sin\alpha}{3 + 10\cos\alpha}$

বা, $3 + 10\cos\alpha = 0$ $\left[\because \dfrac{\text{যে কোনো সংখ্যা}}{0} = \infty\right]$

বা, $10\cos\alpha = -3$

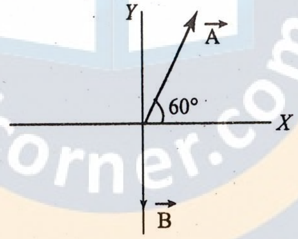
বা, $\cos\alpha = -\dfrac{3}{10}$

$\therefore \alpha = 107.46^\circ$

সুতরাং সোজা ওপারে $B$ বিন্দুতে পৌঁছাতে হলে নৌকাকে স্রোত তথা তীরের সাথে $107.46^\circ$ কোণ করে চালাতে হবে।

উ: (ক) 65.72 m ; (খ) স্রোতের সাথে $107.46^\circ$ কোণে নৌকা চালাতে হবে।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.২৪ :** চিত্রে $|\vec{A}| = 5$ এবং $|\vec{B}| = 6$




**(ক) $(\vec{A} - \vec{B})$ এর মান নির্ণয় কর।**

**(খ) $(\vec{A} \times \vec{B})$ ভেক্টরটি $(\vec{A} + \vec{B})$ এর উপর লম্বভাবে অবস্থিত-গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে এর সত্যতা যাচাই কর।** [ঢা. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি, $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

এখানে $\vec{A}$ এবং $-\vec{B}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$|\vec{A}| = 5$

$|\vec{B}| = 6$

এখন সামান্তরিকের সূত্রানুসারে,

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\alpha}$$
$$= \sqrt{5^2 + 6^2 + 2 \times 5 \times 6 \times \cos 30^\circ}$$
$$= 10.63$$

(খ) আমরা জানি, দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল শূন্য হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হয়। সুতরাং যদি $(\vec{A} \times \vec{B})$ এবং $(\vec{A} + \vec{B})$ এর স্কেলার গুণফল অর্থাৎ $(\vec{A} \times \vec{B}) . (\vec{A} + \vec{B})$ শূন্য হয় তবে $(\vec{A} \times \vec{B})$ ভেক্টরটি $(\vec{A} + \vec{B})$ এর উপর লম্ব হবে।

এখানে

$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

এখানে,

$$\vec{A} + \vec{B} = A_x \hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} + B_x \hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

এবং $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

এখন $(\vec{A} \times \vec{B}) . (\vec{A} + \vec{B}) = (A_yB_z - A_zB_Y)(A_x + B_x)$

$$+ (A_zB_x - A_xB_z)(A_y + B_y)$$

$$+ (A_xB_y - A_yB_x)(A_z + B_z)$$

$$= A_xA_yB_z - A_xA_zB_y + A_yB_xB_z - A_zB_xB_y$$

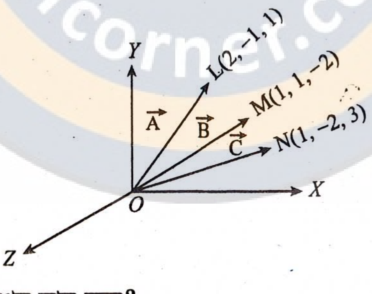
$$+ A_yA_zB_x - A_xA_yB_z + A_zB_xB_y - A_xB_yB_z$$

$$+ A_xA_zB_y - A_yA_zB_x + A_xB_yB_z - A_yB_xB_z$$

$= 0 \;\therefore$ প্রমাণিত

উ: (ক) 10.63 (খ) প্রমাণিত

**গাণিতিক উদাহরণ ২.২৫।**




**(ক) $\vec{C}$, $X$ অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণের মান কত?**

**(খ) $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ ভেক্টরদ্বয়ের লম্ব দিকের ভেক্টরটি $\vec{A}$ এর সাথে একই সমতলে অবস্থান করে কিনা গাণিতিক ভাবে যাচাই কর।** [কু. বো. ২০১৬]

এখানে,

$\vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

(ক) আমরা জানি, $\vec{C}$ ভেক্টর $X$-অক্ষের সাথে $\alpha$ কোণ উৎপন্ন করলে,

$$\cos\alpha = \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{1}{\sqrt{14}} = 0.26726$$

$$\therefore \alpha = \cos^{-1}(0.26726) = 74.5^\circ$$

(খ) আমরা জানি, দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল একটি ভেক্টর রাশি যার দিক ভেক্টরদ্বয়ের লম্ব দিকে।

ধরি, $\vec{D} = \vec{B} \times \vec{C}$

এখানে,

$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\vec{D} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= \hat{i}\,(3-4) + \hat{j}\;(-2-3) + \hat{k}\;(-2\;-1) \\ &= -\hat{i} - 5\hat{j} - 3\hat{k} \end{aligned}$$

এখন $\vec{D}$ এবং $\vec{A}$ ভেক্টরটি একই সমতলে থাকবে না যদি ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হয় অর্থাৎ তাদের স্কেলার গুণফল শূন্য হয়।

$$\begin{aligned} \text{এখন } \vec{A} \,.\, \vec{D} &= A_x D_x + A_y D_y + A_z D_z \\ &= (-2) \times 1 + (-1) \times (-5) + (1) \times (-3) \\ &= -2 + 5 - 3 = 0 \end{aligned}$$

অর্থাৎ $\vec{A} . (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$

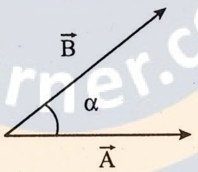
যেহেতু $\vec{A} . (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$

সেহেতু $\vec{A} . \vec{B}$ এবং $\vec{C}$ একই সমতলে অবস্থান করে।

সুতরাং, $\vec{A} . \vec{B} \times \vec{C}$ এর লম্ব দিকের সাথে একই সমতলে অবস্থান করে না।

**উ:** (ক) $74.5°$ (খ) একই সমতলে অবস্থিত।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.২৬।**




$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

(ক) $\alpha$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\alpha$ এর মানের পরিবর্তন কত হলে $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপ এক-চতুর্থাংশ হবে? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। [চ. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি,

$\vec{A} . \vec{B} = AB \cos \alpha$

$\therefore \cos \alpha = \dfrac{\vec{A} . \vec{B}}{AB}$

এখানে,

$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$\alpha = ?$

এখন,

$\vec{A} . \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 2 \times 6 + 2 \times (-3) + (-1) \times 2$

$= 12 - 6 - 2 = 4$

$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$

$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{36+9+4} = 7$

$\therefore \cos\alpha = \frac{4}{3\times 7} = 0.19048$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}(0.19048) = 79.02°$

(খ) প্রথম ক্ষেত্রে $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপ,

$B_1 = B\cos\alpha = 7\cos 79.02°$
$= 1.33$

এখানে, (ক) থেকে
$A = 3$
$B = 7$
$\alpha = 79.02°$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে অভিক্ষেপ $B_2 = \frac{1}{4}B_1 = \frac{1}{4}\times 1.33$
$= 0.3325$

এর জন্য $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\beta$ হলে

$B_2 = B\cos\beta$

বা, $\cos\beta = \frac{B_2}{B} = \frac{0.3325}{7} = 0.0475$

$\therefore \beta = \cos^{-1}(0.0475) = 87.28°$

কোণ বাড়াতে হবে $87.28° - 79.02° = 8.26°$

উ: (ক) $79.02°$ (খ) $8.26°$ বাড়াতে হবে।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.২৭। যদি $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ হয়, তবে ভেক্টর $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।** [ব. বো. ২০০৯]

**সমাধান :**

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

$\therefore A\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{B}$

এবং $B\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{A}$

এখানে,
$\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$
$\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$
$\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta$ হলে,
$\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $A\cos\theta = ?$
$\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $B\cos\theta = ?$

এখন, $A = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2} = \sqrt{(9)^2 + (1)^2 + (-6)^2} = 10.86$

আবার, $B = \sqrt{B_x{}^2 + B_y{}^2 + B_z{}^2} = \sqrt{(4)^2 + (-6)^2 + (5)^2} = 8.77$

$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 9\times 4 + 1\times(-6) + (-6)\times .5 = 0$

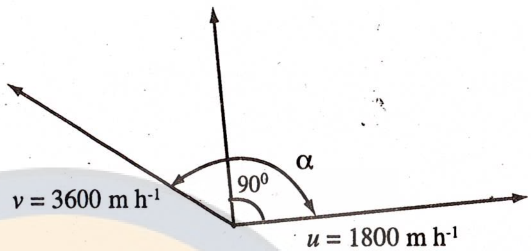
$\therefore$ অভিক্ষেপ, $A\cos\theta = \frac{0}{10.80} = 0$ অভিক্ষেপ, $B\cos\theta = \frac{0}{8.77} = 0$

উ: 0

**গাণিতিক উদাহরণ ২.২৮।** স্রোত না থাকলে একজন সাঁতারু **3600 m h$^{-1}$** বেগে সাঁতার কাটতে পারেন। **1800 m h$^{-1}$** বেগে 240 m প্রশস্ত একটি নদী সরলরেখা বরাবর প্রবাহিত হচ্ছে।

**(ক) নদীর এপার থেকে ওপারের ঠিক বিপরীত বিন্দুতে যেতে হলে সাঁতারুকে কোন দিকে সাঁতার কাটতে হবে? (খ) নদীটির অপর পাড়ে পৌঁছতে সাঁতারুর কত সময় লাগে?** [বুয়েট ২০০৩-২০০৪]

(ক) ধরা যাক, স্রোতের বেগ $u$ এবং সাঁতারুর বেগ $v$ এবং বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha$। নদীটিকে সোজাসুজি অতিক্রম করতে সাঁতারুর লব্ধি বেগ $R$ স্রোতের বেগ $u$ এর সাথে $\theta = 90^\circ$ কোণ তৈরি করতে হবে।




এখানে,

স্রোতের বেগ, $u = 1800 \text{ m h}^{-1}$

সাঁতারুর বেগ, $v = 3600 \text{ m h}^{-1}$

$\theta = 90^\circ$

$\alpha = ?$

আমরা জানি, $\tan\theta = \dfrac{v \sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

সমীকরণে মান বসিয়ে,

$$\tan 90^\circ = \frac{(3600 \text{ m h}^{-1}) \sin\alpha}{1800 \text{ m h}^{-1} + (3600 \text{ m h}^{-1}) \cos\alpha}$$

কিন্তু $\tan 90^\circ = \infty$

$$\therefore \infty = \frac{3600 \sin\alpha}{1800 + 3600 \cos\alpha}$$

বা, $1800 + 3600 \cos\alpha = 0 \quad \left[\because \dfrac{\text{যেকোনো সংখ্যা}}{0} = \infty\right]$

বা, $3600 \cos\alpha = -2$

বা, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore \alpha = 120^\circ$

(খ) সাঁতারুর বেগ, $v = 3600 \text{ m h}^{-1}$, স্রোতের সাথে $120^\circ$ কোণে। আমরা জানি নদীর প্রস্থ বরাবর সাঁতারুর বেগের উপাংশ সাঁতারুকে নদীর অপর পাড়ে পৌঁছে দেয়।

এখানে

নদীর প্রস্থ, $d = 240 \text{ m}$

প্রয়োজনীয় সময়, $t = ?$

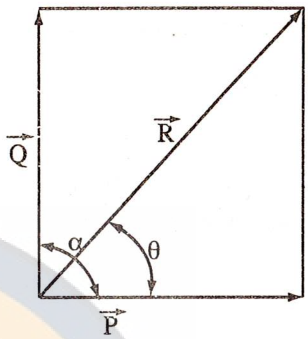
$$\text{আমরা জানি,} \quad t = \frac{\text{নদীর প্রস্থ}}{\text{প্রস্থ বরাবর সাঁতারুর বেগের উপাংশ}} = \frac{d}{v \sin\alpha}$$

$$= \frac{240 \text{ m}}{3600 \times \sin 120^\circ} = 277.128 \text{ s}$$

**উ:** (ক) $120^\circ$ (খ) $277.128$ s

**গাণিতিক উদাহরণ ২.২৯। দেখাও যে, একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টর রাশির মান সমান হলে এদের লব্ধি ভেক্টর রাশিদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।** [সি. বো. ২০০৭; চ. বো. ২০০৫]

ধরা যাক, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি। এরা একই বিন্দুতে পরস্পরের সাথে $\alpha$ কোণে আনত। এখন লব্ধি $\vec{R}$ ও $\vec{P}$-এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta$ হলে ভেক্টর রাশির সামান্তরিকের সূত্রানুসারে,




$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

ভেক্টর দুটির মান সমান হলে, অর্থাৎ $Q = P$ হলে,

$$\tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{P + P\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

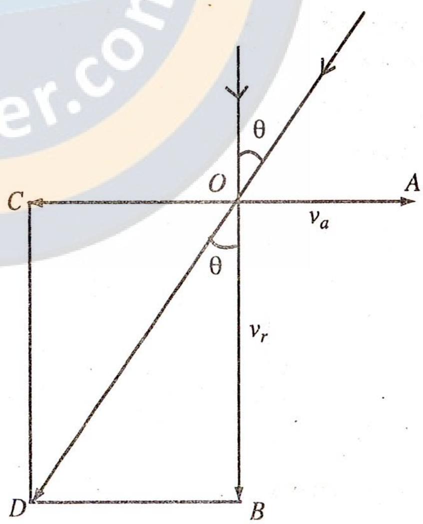
$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\alpha}{2}$

$\therefore\ \theta = \frac{\alpha}{2}$ অর্থাৎ লব্ধি ভেক্টর; ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.৩০। কোনো একদিন উল্লম্বভাবে 30 m s$^{-1}$ বেগে বৃষ্টি পড়ছিল। বায়ু উত্তর হতে দক্ষিণ দিকে 10 m s$^{-1}$ বেগে প্রবাহিত হলে বৃষ্টি হতে রক্ষা পেতে কত কোণে ছাতা ধরতে হবে?** [বুয়েট ২০০৬–২০০৭]

ধরা যাক, বায়ু $v_a$ বেগে $OA$ বরাবর প্রবাহিত হচ্ছে এবং বৃষ্টি $v_r$ বেগে খাড়া নিচের দিকে $OB$ বরাবর পড়ছে।




এখানে, বায়ুর বেগ, $v_a = 10$ m s$^{-1}$

বৃষ্টির বেগ, $v_r = 30$ m s$^{-1}$

ধরা যাক, ছাতা উল্লম্বের সাথে অর্থাৎ বৃষ্টির সাথে $\theta$ কোণে ধরতে হবে।

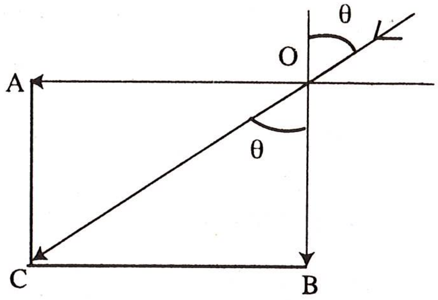
আমরা জানি, $\tan\theta = \frac{DB}{OB} = \frac{OC}{OB} = \frac{v_a}{v_r} = \frac{10 \text{ m s}^{-1}}{30 \text{ m s}^{-1}}$

$= 0.3333$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}(0.3333) = 18.43°$

উ: উল্লম্বের সাথে 18.43° কোণে ছাতা ধরতে হবে।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.৩১। 10 কিলোমিটার/ঘণ্টায় বৃষ্টি পড়ছে এবং 60 কিলোমিটার/ঘণ্টায় পূর্ব হতে পশ্চিমে বাতাস বইছে। পূর্ব হতে পশ্চিম অভিমুখী চলন্ত গাড়ির গতিবেগ নির্ণয় কর যাতে (ক) গাড়ির সামনের ও পিছনের কাচ ভিজে (খ) শুধুমাত্র পিছনের কাচ ভিজে।** [রুয়েট ২০০৪-২০০৫]




ধরা যাক, বায়ু $OA$ বরাবর $v_a$ বেগে প্রবাহিত হচ্ছে এবং বৃষ্টি $v_r$ বেগে খাড়া নিচের দিক বরাবর পড়ছে। এখানে বৃষ্টির বেগ $v_r = OB = 10 \text{ km h}^{-1}$ এবং বাতাসের বেগ $v_a = OX = 60 \text{ km h}^{-1}$। বাতাসের বেগের প্রভাবে বৃষ্টির লব্ধি বেগ $v$ হলে,

$$v = OC = \sqrt{OB^2 + OA^2 + 2OA \times OB \times \cos 90°}$$

বা, $v = \sqrt{v_r^2 + v_a^2} = \sqrt{(10 \text{ km h}^{-1})^2 + (60 \text{ km h}^{-1})^2}$

$= 60.83 \text{ km h}^{-1}$

বৃষ্টির লব্ধি বেগ উল্লম্বের সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করলে,

$$\tan\theta = \frac{BC}{OB} = 60.83$$

$$\theta = \tan^{-1}(60.83) = 80.66°$$

বৃষ্টির লব্ধিবেগের অনুভূমিক উপাংশ $= v \sin\theta = 60.83 \text{ km h}^{-1} \times \sin 60°$

(ক) এখন গাড়িটি যদি বাতাসের লব্ধিবেগের অনুভূমিক উপাংশ $60.02 \text{ km h}^{-1} \approx 60 \text{ km h}^{-1}$ বেগে গতিশীল হয় তাহলে গাড়ির উপর বৃষ্টি উল্লম্বভাবে পতিত হয় অর্থাৎ বৃষ্টি তখন সামনের ও পিছনের কাচকে ভিজাবে।

(খ) আর গাড়ির বেগ বাতাসের লব্ধিবেগের অনুভূমিক উপাংশ $60 \text{ km h}^{-1}$ এর চেয়ে কম হলে বৃষ্টি শুধু পিছনের কাচকে ভিজাবে।

**উ:** (ক) গাড়ি বৃষ্টির লব্ধিবেগের অনুভূমিক উপাংশের সমান বেগে চললে সামনের ও পিছনের কাচ ভিজাবে।

(খ) গাড়ি বৃষ্টির লব্ধিবেগের অনুভূমিক উপাংশের চেয়ে কম বেগে চললে বৃষ্টি শুধুমাত্র পিছনের কাচকে ভিজাবে।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.৩২। $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে প্রমাণ কর যে,**

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ [কু. বো. ২০০১]

**সমাধান :**

এখানে,
$\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$
$\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$
$\vec{C} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(4+3) + \hat{j}(-3-2) + \hat{k}(1-2)$$

$$\therefore \vec{B} \times \vec{C} = 7\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$$

সুতরাং বামপক্ষ $= \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$

$= (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (7\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k})$

$= 3 \times 7 + 2 \times (-5) + 1 \times (-1)$

$= 21 - 10 - 1 = 10$

আবার $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}\,(-6-2) + \hat{j}\,(1+9) + \hat{k}\,(6-2)$

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = -8\hat{i} + 10\hat{j} + 4\hat{k}$

সুতরাং ডানপক্ষ $= (\vec{A} \times \vec{B}) . \vec{C}$

$= (-8\hat{i} + 10\hat{j} + 4\hat{k}) . (\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$

$= (-8) \times 1 + 10 \times 1 + 4 \times 2$

$= -8 + 10 + 8$

$= 10$

সুতরাং বামপক্ষ = ডানপক্ষ

$\therefore$ প্রমাণিত।

**গাণিতিক উদাহরণ ২.৩৩। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি। এদের লম্ব অভিমুখে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।** [ঢা. বো. ২০১১]

আমরা জানি, দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল ভেক্টর দুটি দ্বারা গঠিত সমতলের ওপর লম্ব। সুতরাং ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর গুণফল বরাবর বা তার বিপরীত দিক বরাবর একক ভেক্টর ভেক্টরদ্বয়ের সমতলের ওপর লম্ব হবে।

এখানে,
$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$
$\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$
একক ভেক্টর, $\hat{n} = ?$

ধরা যাক, $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ অতএব, $\hat{n} = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|}$

কিন্তু $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}\,(4-3) - \hat{j}\,(4+6) + \hat{k}\,(-6-12)$

$= \hat{i} - 10\hat{j} - 18\hat{k}$

$\therefore |\vec{C}| = \sqrt{(1)^2 + (-10)^2 + (-18)^2} = \sqrt{425}$

$$\therefore \hat{n} = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \pm \frac{\hat{i} - 10\hat{j} - 18\hat{k}}{\sqrt{425}} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{425}}\hat{i} - \frac{10}{\sqrt{425}}\hat{j} - \frac{18}{\sqrt{425}}\hat{k}\right)$$

উ : $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{425}}\hat{i} - \frac{10}{\sqrt{425}}\hat{j} - \frac{18}{\sqrt{425}}\hat{k}\right)$

গাণিতিক উদাহরণ ২.৩৪। $\vec{P} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ হলে, $\vec{P}$ ভেক্টরটির $X, Y$ ও $Z$-অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ নির্ণয় কর।

$\vec{P}$ ভেক্টরটি $X, Y$ ও $Z$-অক্ষের সাথে যথাক্রমে $\alpha, \beta$ ও $\gamma$ কোণ উৎপন্ন করলে আমরা জানি,

$$\cos\alpha = \frac{P_x}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}},\ \cos\beta = \frac{P_y}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}} \text{ এবং } \cos\gamma = \frac{P_z}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} \text{ বা, } \alpha = \cos^{-1}\frac{2}{7} = 73.40^\circ$$

এবং $\cos\beta = \frac{3}{7}$ $\quad\therefore \beta = \cos^{-1}\frac{3}{7} = 64.62^\circ$

এবং $\cos\gamma = \frac{6}{7}$ $\quad\therefore \gamma = \cos^{-1}\frac{6}{7} = 31^\circ$

**উ:** $\alpha = 73.40^\circ$, $\beta = 64.62^\circ$ এবং $\gamma = 31^\circ$

# অনুশীলনী

## ক-বিভাগ : বহুনির্বাচনি প্রশ্ন (MCQ)

**সঠিক/সর্বোৎকৃষ্ট উত্তরের বৃত্ত (●) ভরাট কর :**

১। নিচের কোনটি একক ভেক্টর নির্দেশ করে? [রা. বো. ২০১৫]

(ক) $\hat{a} = \frac{A}{\vec{A}}$ ○ (খ) $\hat{a} = \frac{\vec{A}}{\vec{A}}$ ○

(গ) $\hat{a} = \frac{\vec{A}}{A}$ ○ (ঘ) $a = \frac{\vec{A}}{A}$ ○

২। দুটি সমান মানের বলের লব্ধির মান যেকোনো একটি বলের মানের সমান হলে বল দুটির মধ্যবর্তী কোণ হবে— [ঢা. বি. ২০১৮–২০১৯]

(ক) $60^\circ$ ○ (খ) $90^\circ$ ○

(গ) $120^\circ$ ○ (ঘ) $0^\circ$ ○

৩। $P$ ও $Q$ এর স্থানাঙ্ক $(3, -2, 1)$ এবং $(3, -4, 5)$, $PQ$ এর মান কত? [রা. বো. ২০১৭]

(ক) $\sqrt{20}$ ○ (খ) $\sqrt{29}$ ○

(গ) $\sqrt{56}$ ○ (ঘ) $6\sqrt{3}$ ○

৪। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব হবে যদি— [চ. বো. ২০১৭]

(ক) $\vec{A}.\vec{B} = 1$ ○ (খ) $\vec{A} \times \vec{B} = 1^\circ$ ○

(গ) $\vec{A}.\vec{B} = 0$ ○ (ঘ) $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ ○

৫। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের সমান্তরাল হবে যদি—

(ক) $\vec{A}.\vec{B} = 0$ ○ (খ) $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ ○

(গ) $\vec{A}.\vec{B} = 1$ ○ (ঘ) $\vec{A} \times \vec{B} = 1$ ○

৬। কোনো সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু যদি দুটি ভেক্টরের মান ও দিক নির্দেশ করে তাহলে ঐ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল হবে—

(ক) ভেক্টর দুটির যোগফলের সমান ○ (গ) ভেক্টর দুটির বিয়োগফলের সমান ○

(খ) ভেক্টর দুটির ডট গুণফলের সমান ○ (ঘ) ভেক্টর দুটির ক্রস গুণফলের মানের সমান ○

৭। নিচের কোন ক্রিয়াটি বিনিময় সূত্র মেনে চলে না ?

(ক) ভেক্টর রাশির ডট গুণন ○ (খ) ভেক্টর রাশির ক্রস গুণন ○

(গ) ভেক্টর রাশির যোগ ○ (ঘ) উপরের কোনোটিই নয় ○

৮। $m$ এর মান কত হলে $\vec{P} = 4\hat{i} + m\hat{j}$ এবং $\vec{Q} = 8\hat{i} - 4\hat{j} + 9\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে? [ঢা. বো. ২০১৬]

(ক) 8 ○ (খ) 6 ○

(গ) 4 ○ (ঘ) – 4 ○

৯। $\vec{A} = -\vec{B}$ হলে $\vec{A} \times \vec{B}$ এর মান হবে—

(ক) $-A^2$ ○ (খ) 0 ○

(গ) $-B^2$ ○ (ঘ) 1 ○

১০। ভেক্টর $\vec{A}, \vec{B}$ ও $\vec{C}$ এর মান যথাক্রমে 12, 5 এবং 13 এবং $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$। ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত ? [ঢা. বি. ২০১৭–২০১৮]

(ক) $\pi$ ○ (খ) $\frac{\pi}{2}$ ○

(গ) শূন্য ○ (ঘ) $\frac{\pi}{4}$ ○

১১। ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর—

(ক) $\frac{2}{9}\hat{i} - \frac{1}{9}\hat{j} - \frac{2}{9}\hat{k}$ ○ (খ) $\frac{2}{3}\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$ ○

(গ) $\frac{2}{5}\hat{i} - \frac{1}{5}\hat{j} + \frac{2}{5}\hat{k}$ ○ (ঘ) $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ○

১২। দুটি বলের লব্ধির সর্বোচ্চ মান 28 N এবং সর্বনিম্ন মান 4N। বল দুটি পরস্পরের সাথে 90° কোণে কোনো একটি কণার উপর ক্রিয়া করলে লব্ধি বল হবে— [চুয়েট ২০১৫–২০১৬]

(ক) 400 N ○ (খ) 32 N ○

(গ) 28.8 N ○ (ঘ) 20 N ○

১৩। দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল 20 এবং ভেক্টর গুণফলের মান $6\sqrt{2}$। ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ হবে— [কুয়েট ২০১৭-২০১৮]

(ক) 60° ○ (খ) 90° ○

(গ) 30° ○ (ঘ) 120° ○

১৪। $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ ও $\vec{B} = 4\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার গুণফল কত? [সি. বো. ২০১৫]

(ক) 3 ○ (খ) 7 ○

(গ) 9 ○ (ঘ) 11 ○

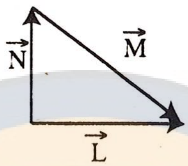
১৫। নিচের কোন ভেক্টরের পাদবিন্দু ও শীর্ষবিন্দু একই?

(ক) সমরেখ ভেক্টর ○ (খ) নাল ভেক্টর ○

(গ) একক ভেক্টর ○ (ঘ) সমতলীয় ভেক্টর ○

১৬। নিচের চিত্রে $\vec{M}$, $\vec{N}$ এবং $\vec{L}$ এই তিনটি ভেক্টর রাশিকে দেখান হয়েছে। চিত্র থেকে নির্ণয় করা যায় যে—

[ঢা. বি. ২০০৪–২০০৫; ঢা. বো. ২০১৭]




(ক) $\vec{L} + \vec{N} - \vec{M} = 0$ ○ (খ) $\vec{L} + \vec{M} + \vec{N} = 0$ ○

(গ) $\vec{L} + \vec{M} - \vec{N} = 0$ ○ (ঘ) $\vec{M} + \vec{N} - \vec{L} = 0$ ○

১৭। 5 N এবং 10 N মানের দুটি বল একটি কণার উপর প্রযুক্ত হলে নিম্নের কোন বলটি কণাটির উপর লব্ধি হতে পারে না?

(ক) 5 N ○ (খ) 10 N ○

(গ) 15 N ○ (ঘ) 20 N ○

১৮। কোন ভেক্টরটি $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ এর উপর লম্ব?

(ক) $4\hat{i} + 3\hat{j}$ ○ (খ) $6\hat{i}$ ○

(গ) $7\hat{k}$ ○ (ঘ) $3\hat{j}$ ○

১৯। কোনো বল দ্বারা কৃতকাজ, $W = \vec{F} . \vec{S}$। কোনো এক ক্ষেত্রে $\vec{F}$ এবং $\vec{S}$ শূন্য না হলেও কৃতকাজ শূন্য। এ থেকে আমরা বলতে পারি—

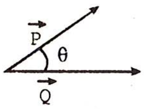
(ক) $\vec{F}$ এবং $\vec{S}$ এর দিক একই ○ (খ) $\vec{F}$ এবং $\vec{S}$ বিপরীতমুখী ○

(গ) $\vec{F}$ এবং $\vec{S}$ পরস্পরের উপর লম্ব ○ (ঘ) $\vec{F}$ এবং $\vec{S}$ পরস্পর সমান্তরাল ○

২০। ভেক্টর $\vec{A}$ ধনাত্মক $X$-অক্ষ বরাবর অবস্থিত। অন্য একটি ভেক্টর $\vec{B}$ এমনভাবে অবস্থিত যেন $\vec{A} \times \vec{B}$ এর মান শূন্য হয়। তাহলে $\vec{B}$ হতে পারে—

(ক) $4\hat{j}$ ○ (খ) $-4\hat{i}$ ○

(গ) $-(\hat{i} + \hat{j})$ ○ (ঘ) $(\hat{j} + \hat{k})$ ○

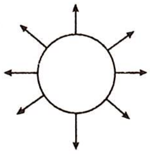
২১। 


চিত্রানুসারে চিত্র $\vec{Q}$ এর উপরে $\vec{P}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ— [ঢা. বো. ২০১৬; কু. বো. ২০১৯]

(ক) $Q \cos\theta$ ○ (খ) $P \cos\theta$ ○

(গ) $P \sin\theta$ ○ (ঘ) $Q \sin\theta$ ○

২২।



চিত্রটি একটি ভেক্টর ক্ষেত্রে ডাইভারজেন্স হলে কোনটি সঠিক? [ঢা. বো. ২০১৬]

(ক) $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ ○ (খ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ ○

(গ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ = '+' ve ○ (ঘ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ = '−' ve ○

২৩। কোনো অন্তরীকরণযোগ্য স্কেলার অপেক্ষকের গ্রেডিয়েন্ট হচ্ছে—

(ক) $\vec{\nabla}\ \vec{V}$ ○ (খ) $\vec{\nabla}\varphi$ ○

(গ) $\vec{\nabla}.\vec{V}$ ○ (ঘ) $\vec{\nabla}\ \vec{\varphi}$ ○

২৪। কোনো অন্তরীকরণযোগ্য ভেক্টর অপেক্ষকের ডাইভারজেন্স হচ্ছে—

(ক) $\vec{\nabla}.\vec{V}$ ○ (খ) $\vec{\nabla}V$ ○

(গ) $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ ○ (ঘ) $\vec{V}.\vec{\nabla}$ ○

২৫। কোনো অন্তরীকরণযোগ্য ভেক্টর অপেক্ষকের কার্ল হচ্ছে—

(ক) $\vec{\nabla}.\vec{V}$ ○ (খ) $\vec{\nabla}V$ ○

(গ) $\vec{\nabla}\ \vec{V}$ ○ (ঘ) $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ ○

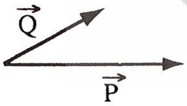
২৬। $\vec{P}.\vec{Q} = 0$ হলে, নিচের কোন চিত্রটি সঠিক ?

(ক) 

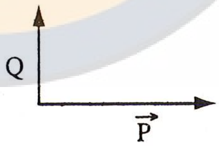
○

(খ) 

○

(গ) 

○

(ঘ) 

○

২৭। $(\hat{j}\times\hat{k})\times\hat{i} = ?$

(ক) $\hat{i}$ ○ (খ) $i^2$ ○

(গ) $\vec{0}$ ○ (ঘ) 1 ○

২৮। মান শূন্য নয় এ রকম একটি ভেক্টরকে তার মান দিয়ে ভাগ করলে কী পাওয়া যায় ?

(ক) একক ভেক্টর ○ (খ) সমতলীয় ভেক্টর ○

(গ) অবস্থান ভেক্টর ○ (ঘ) নাল ভেক্টর ○

২৯। $\hat{i}$ এবং $\hat{j}$ যে তলে অবস্থিত সেই তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর হলো— [ঢা. বো. ২০১৫]

(ক) $(\hat{j}\times\hat{k})$ ○ (খ) $(\hat{i}\times\hat{j})$ ○

(গ) $(\hat{k}\times\hat{j})$ ○ (ঘ) $(\hat{i}\times\hat{k})$ ○

৩০। $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ; $\vec{B} = 6\hat{i} - m\hat{j} + 4\hat{k}$, $m$ এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব হবে ? [ঢা. বো. ২০১৫)

(ক) 9 ○ (খ) 11 ○

(গ) 12 ○ (ঘ) 13 ○

৩১। সলিনয়ডাল হলো— [ কু. বো. ২০১৫; চ. বো. ২০১৭; য. বো. ২০১৫]

(ক) $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ ○ (খ) $\vec{\nabla} . \vec{V} = 0$ ○

(গ) $\vec{\nabla}\varphi = 0$ ○ (ঘ) $\vec{\nabla} = 0$ ○

৩২। $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $\vec{\nabla} . \vec{r}$ কত ? [ কু. বো. ২০১৫]

(ক) 1 ○ (খ) 2 ○

(গ) 3 ○ (ঘ) 4 ○

৩৩। $\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, হলে $\vec{A} \times \vec{B}$ এর জন্য নিচের কোনটি সঠিক ? [কু. বো. ২০১৫]

(ক) $18\hat{i} + 21\hat{j} + 30\hat{k}$ ○ (খ) $8\hat{i} + 21\hat{j} + 18\hat{k}$ ○

(গ) $8\hat{i} + 3\hat{j} + 30\hat{k}$ ○ (ঘ) $8\hat{i} + 21\hat{j} + 30\hat{k}$ ○

৩৪। $\vec{A} . \vec{B} = 0$ হলে বোঝায়— [ কু. বো. ২০১৫]

(ক) $\vec{A} = 0$ ○ (খ) $\vec{B} = 0$ ○

(গ) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ একে অপরের উপর লম্ব ○ (ঘ) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল ○

৩৫। ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta$ এবং $|\vec{P} + \vec{Q}| = |\vec{P} - \vec{Q}|$ হলে, $\theta$-এর মান কত ? [রা. বো. ২০১৫; দি. বো. ২০১৭]

(ক) 0° ○ (খ) 45° ○

(গ) 90° ○ (ঘ) 180° ○

৩৬। $\hat{j} \times (\hat{j} \times \hat{k}) =$ কত ? [য. বো. ২০১৫]

(ক) $-\hat{k}$ ○ (খ) 0 ○

(গ) $\hat{k}$ ○ (ঘ) $\hat{i}$ ○

৩৭। ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{V}$ অঘূর্ণনশীল হলে নিচের কোনটি সঠিক ? [য. বো. ২০১৯]

(ক) $\vec{\nabla} . \vec{V} = 0$ ○ (খ) $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ ○

(গ) $\vec{V} \times \vec{\nabla} \neq 0$ ○ (ঘ) $\vec{\nabla} . \vec{V} \neq 0$ ○

৩৮। $\vec{A}$ ও এর একক ভেক্টর $\hat{a}$ এর মধ্যবর্তী কোণ— [চ. বো. ২০১৫]

(ক) 0° ○ (খ) 45° ○

(গ) 90° ○ (ঘ) 180° ○

৩৯। $\vec{A} = \hat{i}$ এবং $\vec{B} = \hat{j} + \hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত ? [চ. বো. ২০১৫]

(ক) 0° ○ (খ) 45° ○

(গ) 90° ○ (ঘ) 180° ○

৪০। দুটি সমান ভেক্টর থেকে শূন্য ভেক্টর পেতে হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ হবে— [ব. বো. ২০১৫]
(ক) $0°$ ○ (খ) $45°$ ○
(গ) $90°$ ○ (ঘ) $180°$ ○

৪১। স্কেলার গুণনের উদাহরণ— [ব. বো. ২০১৫]
(ক) কাজ ○ (খ) বল ○
(গ) টর্ক ○ (ঘ) কৌণিক ভরবেগ ○

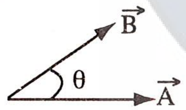
৪২। $\vec{A} \times \vec{B} = ?$ [ব. বো. ২০১৫]
(ক) $n\ AB \cos\theta$ ○ (খ) $AB \sin\theta$ ○
(গ) $-\vec{B} \times \vec{A}$ ○ (ঘ) $\vec{B} \times \vec{A}$ ○

৪৩। $(\hat{j} + \hat{k}) \times \hat{k} =$ কত ? [ব. বো. ২০১৫]
(ক) 1 ○ (খ) $\hat{i}$ ○
(গ) $\hat{j}$ ○ (ঘ) $\hat{k}$ ○

৪৪। নিচের কোনটি $X$-অক্ষের সমান্তরাল ? [সি. বো. ২০১৫]
(ক) $(\hat{i} \times \hat{j}) \times \hat{i}$ ○ (খ) $(\hat{i} \times \hat{j}) \times \hat{k}$ ○
(গ) $(\hat{i} \times \hat{j}) \times \hat{j}$ ○ (ঘ) $(\hat{k} \times \hat{j}) \times \hat{k}$ ○

৪৫। $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ ভেক্টর রাশিটির মান কত ? [দি. বো. ২০১৫]
(ক) 9 ○ (খ) 7 ○
(গ) 49 ○ (ঘ) $\sqrt{7}$ ○

৪৬। যদি $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ এবং $\vec{D} = \vec{B} \times \vec{A}$ হয় তাহলে $\vec{C}$ এবং $\vec{D}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত ? [দি. বো. ২০১৫]
(ক) $90°$ ○ (খ) $0°$ ○
(গ) $180°$ ○ (ঘ) $45°$ ○

৪৭। 


চিত্রের ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার গুণন— [চ. বো. ২০১৫]
(ক) $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos\theta$ ○ (খ) $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin\theta$ ○
(গ) $\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta\ \hat{n}$ ○ (ঘ) $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \sin\theta$ ○

৪৮। $XZ$ সমতলে $3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য কত একক? [ঢা. বো. ২০১৭]
(ক) 5 ○ (খ) $\sqrt{34}$ ○
(গ) $\sqrt{41}$ ○ (ঘ) 12 ○

৪৯। দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরালে ক্রিয়া করছে। ভেক্টরদ্বয় হবে—
(i) সমরেখ ভেক্টর (ii) সমতলীয় ভেক্টর (iii) পরস্পর বিপরীত ভেক্টর
নিচের কোনটি সঠিক ?
(ক) i ○ (খ) i ও ii ○
(গ) i ও iii ○ (ঘ) i, ii ও iii ○

৫০। $\vec{A} = -2\vec{B}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়— [কু. বো. ২০১৭]

(i) সদৃশ (ii) বিসদৃশ (iii) সমরেখ

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii ○ (খ) i ও iii ○

(গ) ii ও iii ○ (ঘ) i, ii ও iii ○

৫১। ভেক্টর যোগ—

(i) বিনিময় সূত্র মেনে চলে (ii) সংযোগ সূত্র মেনে চলে (iii) বণ্টন সূত্র মেনে চলে

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii ○ (খ) i ও iii ○

(গ) ii ও iii ○ (ঘ) i, ii ও iii ○

৫২। $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধির মান হবে—

(i) $\sqrt{P^2 + Q^2}$ (ii) $\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ}$ (iii) $\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ○ (খ) i ও ii ○

(গ) ii ও iii ○ (ঘ) i, ii ও iii ○

৫৩। কোনো ভেক্টর $R$ কে যদি দুটি পরস্পর লম্ব উপাংশে বিভাজিত করা হয় তাহলে $R$ এর সাথে—

(i) $\alpha$ কোণে উপাংশের মান $X = R\cos\alpha$

(ii) $(90^\circ - \alpha)$ কোণে উপাংশের মান $Y = R\sin\alpha$

(iii) $\beta$ কোণে উপাংশের মান $Y = R\sin\beta$

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii ○ (খ) i ও iii ○

(গ) ii ও iii ○ (ঘ) i, ii ও iii ○

৫৪। তিনটি ভেক্টর—

(i) $\frac{12}{14}\hat{i} - \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k}$ (ii) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ (iii) $\frac{A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$

একক ভেক্টরের ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) ii ও iii ○ (খ) i ও ii ○

(গ) i ও iii ○ (ঘ) i, ii ও iii ○

৫৫। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটি থেকে পাই—

(i) $\vec{P} \times \vec{Q} \neq \vec{Q} \times \vec{P}$ (ii) $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$ (iii) $\vec{P}.\vec{Q} = \vec{Q}.\vec{P}$

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ○ (খ) i ও ii ○

(গ) ii ও iii ○ (ঘ) i, ii ও iii ○

৫৬। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পরের বিপরীত ভেক্টর হলে—

(i) $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{0}$ (ii) $\vec{P} . \vec{Q} = 0$ (iii) $\vec{P} \times \vec{Q} = \vec{0}$

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ○ (খ) i ও ii ○

(গ) i ও iii ○ (ঘ) i, ii ও iii ○

৫৭। আয়ত একক ভেক্টরের ক্ষেত্রে— [দি. বো. ২০১৫]

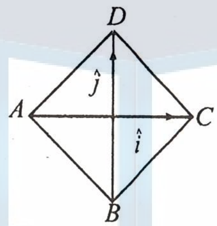
(i) $\hat{i} . \hat{j} = \hat{i} . \hat{k} = \hat{k} . \hat{i} = 0$ (ii) $\hat{i} . \hat{i} = \hat{j} . \hat{j} = \hat{k} . \hat{k} = 1$ (iii) $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii ○ (খ) i ও iii ○

(গ) ii ও iii ○ (ঘ) i, ii ও iii ○

নিচের চিত্রের আলোকে ৫৮ ও ৫৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :




চিত্রে কর্ণদ্বয় হচ্ছে $\overrightarrow{AC} = \hat{i}$ ও $\overrightarrow{BD} = \hat{j}$ [য. বো ২০১৭]

৫৮। $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের সঠিক রূপ কোনটি?

(ক) $(\hat{i} + \hat{j})/4$ ○ (খ) $(\hat{i} + \hat{j})/2$ ○

(গ) $(\hat{i} - \hat{j})/2$ ○ (ঘ) $(\hat{j} + \hat{i})/2$ ○

৫৯। *ABCD* সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল কত?

(ক) 0.5 একক ○ (খ) 1.0 একক ○

(গ) 1.5 একক ○ (ঘ) 2.0 একক ○

$\vec{P} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় একই সমতলে অবস্থিত।

৬০ নং ও ৬১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৬০। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় যে সমতলে অবস্থিত তার অভিলম্ব দিকের ভেক্টরটি হবে—

(ক) $4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$ ○ (খ) $4\hat{i} + 8\hat{j} - 4\hat{k}$ ○

(গ) $8\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$ ○ (ঘ) $4\hat{i} + 4\hat{j} - 8\hat{k}$ ○

৬১। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার গুণফলের মান হবে—

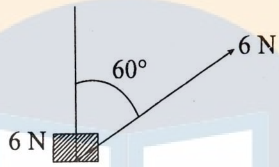
(ক) $\sqrt{96}$ ○ (খ) 16 ○

(গ) $\sqrt{80}$ ○ (ঘ) 10 ○

৬২। $\vec{M}$ ও $\vec{N}$ ভেক্টর দ্বারা গঠিত তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর— [জ. বি ২০১০–২০১১; অভিন্ন প্রশ্ন ২০১৮]

(ক) $\dfrac{\vec{M} \times \vec{N}}{|\vec{M} \times \vec{N}|}$ ○ (খ) $\dfrac{\vec{M} . \vec{N}}{|\vec{M} \times \vec{N}|}$ ○

(গ) $\dfrac{\vec{M} \times \vec{N}}{|\vec{M} . \vec{N}|}$ ○ (ঘ) $\dfrac{|\vec{M} \times \vec{N}|}{\vec{M} \times \vec{N}}$ ○




৬৩। 6 N ওজনের একটি বস্তুকে 6 N বল দ্বারা চিত্রানুযায়ী টানা হচ্ছে। বস্তুটির আপাত ওজন— [অভিন্ন প্রশ্ন-২০১৮]

(ক) 0.8 N ○ (খ) 3 N ○

(গ) 9 N ○ (ঘ) 11.2 N ○

৬৪। একটি লন রোলার ঠেলা বা টানার সময় তুমি এর হাতলে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 19.6 N বল প্রয়োগ করছো। এটা টানা অপেক্ষাকৃত সহজ কারণ এর ওজন তখন কমে— [বুয়েট ২০১০–২০১১]

(ক) $\sqrt{3}$ kg ○ (খ) 19.6 kg ○

(গ) 1 kg ○ (ঘ) 9.8 kg ○

৬৫। দুটি বলের লব্ধির মান 40 N। বল দুইটির মধ্যে ছোট বলটির মান 30 N এবং এটি লব্ধি বলের লম্ব বরাবর ক্রিয়া করে। বড় বলটির মান কত? [ঢা. বি. ২০১০–২০১১]

(ক) 40 N ○ (খ) 45 N ○

(গ) 50 N ○ (ঘ) 60 N ○

৬৬। যদি $\vec{A} = -\vec{B}$ হয়, তবে $\vec{A} \times \vec{B}$ এর মান কত? [ঢা. বি. ২০১২–২০১৩; রা. বি. ২০১৩–২০১৪; শা. বি. প্র. বি. ২০১৪–২০১৫ ; সি. বো. ২০১৬]

(ক) $A^2$ ○ (খ) 1 ○

(গ) 0 ○ (ঘ) $-A^2$ ○

৬৭। যদি $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হয়, তাহলে $\vec{A} + \vec{B}$ এবং $\vec{A} - \vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত? [বুয়েট ২০০৭-২০০৮]

(ক) 60° ○ (খ) 30° ○

(গ) 90° ○ (ঘ) 120° ○

৬৮। একটি লন রোলার টানা ও ঠেলার জন্য অনুভূমিকের সাথে $30°$ কোণে $20$ N বল প্রয়োগ করা হলো। টানার সময় ঠেলা অপেক্ষা কম হবে— [জা. বি. ২০১৫-২০১৬]

(ক) 20 N ○ (খ) 10 N ○
(গ) 15 N ○ (ঘ) কোনোটিই নয় ○

৬৯। $\hat{j}.(2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$ এর মান কত ? [কু. বি. ২০১৩-২০১৪]

(ক) $-2$ ○ (খ) 3 ○
(গ) 1 ○ (ঘ) $-3$ ○

৭০। দুটি দিক রাশির প্রত্যেকটির মান 10 একক। এদের লব্ধির মান $10\sqrt{2}$ একক হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণ কত ? [জা. বি. ২০১৩-২০১৪]

(ক) $0°$ ○ (খ) $60°$ ○
(গ) $90°$ ○ (ঘ) $120°$ ○

৭১। স্রোতের বেগের মানের $\sqrt{2}$ গুণ মানের বেগে সাঁতার কেটে একজন সাঁতারু নদীর অপর পাড়ে সোজাসুজি গিয়ে পৌঁছল। নদীর তীরের সাথে সাঁতারুর বেগের কোণ নির্ণয় কর। [শা.বি.প্র.বি ২০০৭-২০০৮]

(ক) $120°$ ○ (খ) $130°$ ○
(গ) $135°$ ○ (ঘ) $65°$ ○

৭২। বায়ুর উত্তর দিক ও পূর্ব দিকের মধ্যে প্রবাহিত হচ্ছে। বায়ুর বেগের উত্তর দিকের অংশক 5 km/hr এবং পূর্ব দিকের অংশক 12 km/hr। লব্ধিবেগ কত ? [বুয়েট ২০০৫-২০০৬]

(ক) 17 km/hr ○ (খ) 13 km/hr ○
(গ) 60 km/hr ○ (ঘ) 7 km/hr ○

৭৩। দুটি সমমানের ভেক্টর একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধির মান যেকোনো একটি ভেক্টরের মানের সমান। ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ কত ? [ঢা. বি. ২০১১-২০১২, ২০১৮-২০১৯; জা. বি. ২০১০-২০১১; চ. বি. ২০১২-২০১৩; রা. বি. ২০১০-২০১১]

(ক) $180°$ ○ (খ) $120°$ ○
(গ) $90°$ ○ (ঘ) $0°$ ○

৭৪। $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A} . \vec{B}|$ হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ কত ? [দি. বো. ২০১৬; চ. বি. ২০১৪-২০১৫]

(ক) $\frac{\pi}{2}$ ○ (খ) $\frac{\pi}{4}$ ○
(গ) $\pi$ ○ (ঘ) $2\pi$ ○

৭৫। যদি $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ তিনটি ভেক্টর রাশি এবং $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ হয়, তাহলে $\vec{C}$ এর দিক হবে— [রা. বি. ২০১৬-২০১৭]

(ক) $\vec{A}$ বরাবর ○ (খ) $\vec{B}$ বরাবর ○
(গ) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ উভয়ের লম্ব বরাবর ○ (ঘ) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ উভয়ের সমান্তরাল বরাবর ○

৭৬। ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় একটি ভেক্টরের আদি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (5, 4, 3) এবং শেষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (8, 6, 5)। ভেক্টরটির মান কত ? [বা. কৃ. বি. ২০১৪-২০১৫]

(ক) $\sqrt{14}$ ○ (খ) $\sqrt{17}$ ○
(গ) $\sqrt{19}$ ○ (ঘ) $\sqrt{23}$ ○

৭৭। যদি $\vec{P} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হয় তবে এদের মধ্যবর্তী কোণ—
[ঢা. বি. ২০০৯-২০১০; রা. বি. ২০০৮-২০০৯; কু. বি. ২০০৮-২০০৯, ২০০৬-২০০৭]

(ক) 78.51° (খ) 105.25°
(গ) 11.49° (ঘ) 101.59°

৭৮। দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল 18 একক এবং ভেক্টর গুণফল $6\sqrt{3}$ একক হলে ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত ?
[শা.বি.প্র.বি. ২০১৪-২০১৫]

(ক) 20° (খ) 25°
(গ) 30° (ঘ) 35°

৭৯। দুটি ভেক্টর রাশির মান যথাক্রমে 8 এবং 6 একক। তারা পরস্পরের সাথে 30° কোণে ক্রিয়া করে। এদের ভেক্টর গুণফল কত ? [কু. বি. ২০০৮-২০০৯]

(ক) 16 (খ) 20
(গ) 24 (ঘ) 48

৮০। যদি $\vec{AB} = 2\hat{i} + \hat{j}$ এবং $\vec{AC} = 3\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$ হয় তবে AB ও AC কে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল হবে— [বুয়েট ২০০৭-২০০৮]

(ক) $8\sqrt{5}$ (খ) $5\sqrt{6}$
(গ) $3\sqrt{14}$ (ঘ) $6\sqrt{5}$

৮১। যদি $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ কে বিপ্রতীপ ভেক্টর বলা হয় যখন— [কু. বো. ২০১৬]

(ক) $\vec{A} = 4\hat{i}$ ও $\vec{B} = \frac{1}{4}\hat{i}$ (খ) $\vec{A} = 4\hat{i}$ ও $\vec{B} = 8\hat{i}$
(গ) $\vec{A} = 8\hat{i}$ ও $\vec{B} = 4\hat{i}$ (ঘ) $\vec{A} = 4\hat{i}$ ও $\vec{B} = 4\hat{i}$

৮২। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ কে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল— [রা. বো. ২০১৬]

(ক) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ (খ) $|\vec{A} \times \vec{B}|$
(গ) $\frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$ (ঘ) $\frac{1}{2}\vec{A} \cdot \vec{B}$

৮৩। $\vec{A}$, $X$-অক্ষের সাথে 30° কোণে ক্রিয়াশীল। $Y$-অক্ষ বরাবর উপাংশের মান 3 একক হলে $X$-অক্ষ বরাবর উপাংশের মান— [রা. বো. ২০১৬]

(ক) $\frac{3}{2}$ একক (খ) 3 একক
(গ) $3\sqrt{3}$ একক (ঘ) 6 একক

৮৪। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর লব্ধির সর্বোচ্চ মান কোনটি ? [য. বো. ২০১৬]

(ক) $A \times B$ (খ) $A - B$
(গ) $A \div B$ (ঘ) $A + B$

৮৫। যদি $Q(x, y) = 3x^2y$ হয়, তবে $(1, -2)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}Q$ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০১৬]

(ক) $-6\hat{i} - 3\hat{j}$ (খ) $-12\hat{i} + 3\hat{j}$
(গ) $3\hat{i} + 6\hat{j}$ (ঘ) $6\hat{i} - 12\hat{j}$

৮৬। $2\hat{i}+3\hat{j}$ ভেক্টর—

i. এর মান $\sqrt{13}$ ii. $XY$- তলে অবস্থান করে

iii. $Z$-অক্ষের সাথে $90°$ কোণ উৎপন্ন করে [সি. বো. ২০১৬]

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৮৭। $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ও $\vec{R}$ মানের তিনটি ভেক্টর একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা একই ক্রমে নির্দেশিত হলে নিচের কোনটি সঠিক ? [দি. বো. ২০১৬]

(ক) $\vec{P}+\vec{Q}-\vec{R}=\vec{0}$ (খ) $\vec{P}-\vec{Q}-\vec{R}=\vec{0}$

(গ) $\vec{P}-\vec{Q}+\vec{R}=\vec{0}$ (ঘ) $\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R}=\vec{0}$

৮৮। স্কেলার ফাংশনকে ভেক্টর রাশিতে রূপান্তরিত করে— [ব. বো. ২০১৬]

(ক) ক্রস গুণন (খ) ডট গুণন

(গ) গ্রাডিয়েন্ট (ঘ) ডাইভারজেন্স

৮৯। স্কেলার রাশি হচ্ছে— [য. বো. ২০১৬]

i. শক্তি ii. সরণ iii. বিভব

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৯০। $\vec{\nabla}.\vec{v}=0$ হলে— [কু. বো. ২০১৬]

i. কোনো পদার্থে আগত ও নির্গত ফ্ল্যাক্স সমান হয়

ii. তরল অসংকোচনীয় হয়

iii. ভেক্টর ক্ষেত্রটি সলিনয়ডাল

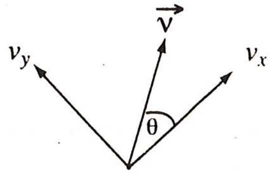
নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

নিচের উদ্দীপকটি পড় এবং ৯১ ও ৯২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

একটি ভেক্টর রাশি $\vec{v}$কে $v_x$ ও $v_y$- তে চিত্রানুযায়ী বিভাজন করা হলো।




৯১। θ-এর মান কত হলে $v_x$ ও $v_y$ উপাংশগুলো সমান হবে ? [কু. বো. ২০১৬]

(ক) $45°$ (খ) $90°$

(গ) $120°$ (ঘ) $150°$

৯২। θ-এর মান 0° থেকে 90° পর্যন্ত বৃদ্ধি করা হলে $v_x$ এবং $v_y$ এর মানের কিরূপ পরিবর্তন হবে ? [কু. বো. ২০১৬]

$v_x$ $v_y$ $v_x$ $v_y$

(ক) কমবে বাড়বে ○ (খ) বাড়বে কমবে ○

(গ) বাড়বে বাড়বে ○ (ঘ) কমবে কমবে ○

৯৩। $\vec{A}$ ও $\vec{A}$-এর বিপরীত ভেক্টরের লব্ধির মান— [রা. বো. ২০১৬]

(ক) 0 ○ (খ) 1 ○

(গ) $A$ ○ (ঘ) $2A$ ○

৯৪। $YZ$-সমতলে $5\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য কত একক ? [চ. বো. ২০১৬]

(ক) $\sqrt{25}$ ○ (খ) $\sqrt{34}$ ○

(গ) $\sqrt{41}$ ○ (ঘ) $\sqrt{50}$ ○

৯৫। কোন ভেক্টরটি $\vec{P} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$-এর উপর লম্ব ? [চ. বো. ২০১৬]

(ক) $3\hat{i} + 4\hat{j}$ ○ (খ) $6\hat{i}$ ○

(গ) $5\hat{k}$ ○ (ঘ) $4\hat{j}$ ○

৯৬। কোনটি স্কেলার রাশি ? [দি. বো. ২০১৬]

(ক) গ্রাডিয়েন্ট ○ (খ) ডাইভারজেন্স ○

(গ) কার্ল ○ (ঘ) সরণ ○

৯৭। $\vec{A} = \hat{i}$, $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{k}$, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ— [দি. বো. ২০১৬]

(ক) 25.12° ○ (খ) 26.57° ○

(গ) 90.67° ○ (ঘ) 180.25° ○

৯৮। তিনটি ভেক্টর, $\vec{a}$, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ যাদের মান যথাক্রমে 4, 3 এবং 5, যোগ করলে শূন্য হয় অর্থাৎ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ তাহলে $|\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})|$ এর মান হলো— [ঢা. বি. ২০১৮—২০১৯]

(ক) 12 ○ (খ) 60 ○

(গ) 25 ○ (ঘ) 15 ○

৯৯। $\hat{n} = \dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$ হলে $-\hat{n}$ সমান কত হবে ? [য. বো. ২০১৯]

(ক) $\dfrac{\vec{B} \times \vec{A}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$ ○ (খ) $\dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{B} \times \vec{A}|}$ ○

(গ) $\dfrac{|\vec{B} \times \vec{A}|}{\vec{A} \times \vec{B}}$ ○ (ঘ) $\dfrac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{\vec{B} \times \vec{A}}$ ○

১০০। দুইটি সদৃশ্য ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যদি একই সময় একই বিন্দুতে ক্রিয়া করে তাহলে— [রা. বো. ২০১৯]

i. $\vec{A} . \vec{B} = 0$ ii. $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ iii. $|\vec{A}| + |\vec{B}| = A + B$

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ○ (খ) i ও ii ○

(গ) ii ও iii ○ (ঘ) i ও iii ○

১০১। $\vec{P} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ হলে, $\vec{P}$ এর মান কত ? [সি. বো. ২০১৯]

(ক) 3 ○ (খ) $\sqrt{3}$ ○

(গ) 1 ○ (ঘ) −1 ○

**বহুনির্বাচনি প্রশ্নাবলির উত্তরমালা :**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ১।(গ) | ২।(গ) | ৩।(ক) | ৪।(গ) | ৫।(খ) | ৬।(ঘ) | ৭।(খ) | ৮।(ক) | ৯।(খ) | ১০।(খ) | ১১।(খ) |
| ১২।(ঘ) | ১৩।(গ) | ১৪।(খ) | ১৫।(খ) | ১৬।(ঘ) | ১৭।(ঘ) | ১৮।(গ) | ১৯।(গ) | ২০।(খ) | ২১।(খ) | ২২।(গ) |
| ২৩।(খ) | ২৪।(ক) | ২৫।(ঘ) | ২৬।(ঘ) | ২৭।(গ) | ২৮।(ক) | ২৯ (খ) | ৩০।(খ) | ৩১।(খ) | ৩২ (খ) | ৩৩।(ঘ) |
| ৩৪।(গ) | ৩৫।(গ) | ৩৬।(ক) | ৩৭।(খ) | ৩৮।(ক) | ৩৯।(গ) | ৪০।(ঘ) | ৪১।(ক) | ৪২।(গ) | ৪৩।(খ) | ৪৪।(গ) |
| ৪৫।(খ) | ৪৬।(গ) | ৪৭।(ক) | ৪৮।(ক) | ৪৯।(খ) | ৫০।(গ) | ৫১।(ঘ) | ৫২।(ঘ) | ৫৩।(ক) | ৫৪।(গ) | ৫৫।(ঘ) |
| ৫৬।(গ) | ৫৭।(ঘ) | ৫৮।(গ) | ৫৯।(ক) | ৬০।(গ) | ৬১।(ঘ) | ৬২।(ক) | ৬৩।(খ) | ৬৪।(ঘ) | ৬৫।(গ) | ৬৬.(গ) |
| ৬৭।(গ) | ৬৮।(খ) | ৬৯।(ঘ) | ৭০।(ক) | ৭১।(গ) | ৭২।(খ) | ৭৩।(খ) | ৭৪।(খ) | ৭৫।(গ) | ৭৬।(খ) | ৭৭।(ঘ) |
| ৭৮।(গ) | ৭৯।(গ) | ৮০।(গ) | ৮১।(ক) | ৮২।(গ) | ৮৩।(গ) | ৮৪।(ঘ) | ৮৫।(খ) | ৮৬।(ঘ) | ৮৭।(ক) | ৮৮।(গ) |
| ৮৯।(খ) | ৯০।(ঘ) | ৯১।(ক) | ৯২।(ক) | ৯৩।(ক) | ৯৪।(ক) | ৯৫।(গ) | ৯৬।(খ) | ৯৭।(খ) | ৯৮ (খ) | ৯৯।(ক) |
| ১০০।(গ) | ১০১।(খ) | | | | | | | | | |

## খ-বিভাগ : সৃজনশীল প্রশ্ন (CQ)

১। একজন মাঝি 6 km h$^{-1}$ বেগে নৌকা চালাতে পারেন। 3 km h$^{-1}$ বেগে সরলরেখা বরাবর প্রবাহিত একটি নদীর এপার থেকে ওপারে ঠিক বিপরীত বিন্দুতে তার যাওয়ার প্রয়োজন।

**নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :**

ক. ভেক্টর রাশি কী ?

খ. দুটি ভেক্টর রাশির যোগের নিয়ম ব্যাখ্যা কর।

গ. উদ্দীপকে উল্লেখিত মাঝিকে কোন দিকে নৌকা চালাতে হবে বের কর।

ঘ. উদ্দীপকের মাঝি যদি সোজা নৌকা চালান তাহলে তিনি কেন বিপরীত বিন্দুতে যেতে পারবেন না—যুক্তি দিয়ে বোঝাও। তিনি সোজা নৌকা চালালে কোন দিকে কত বেগে যাবেন ?

২। রেহান কলেজে ভেক্টরের ক্লাস শেষ করে বাসায় ফিরে দেখে তাদের লনে ঘাস কাটা হচ্ছে আর তার বাবা সেটা তদারকি করছেন। একজন শ্রমিক একটি লন রোলারকে ঠেলে ঠেলে ঘাস কাটছেন আর তার বাবা আরো ভালো করে তাকে ঠেলতে বলছেন। রেহান তার বাবাকে বলল "আব্বু, উনি লন রোলারকে ঠেলছেন কেন ? লন রোলারকে ঠেলার চেয়ে টানাতো সহজ এবং সেটা বেশি কার্যকরী হবে।"

**নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :**

ক. আয়ত একক ভেক্টর কী ?

খ. ভেক্টরের বিভাজন বলতে কী বুঝ ?

গ. একটি ভেক্টরকে পরস্পর দুটি লম্ব উপাংশে বিভক্ত কর।

ঘ. রেহান কেন তার বাবাকে লন রোলারকে ঠেলার চেয়ে টানা সহজ বলল—ব্যাখ্যা কর।

৩। রনি ও সানির তর্ক হচ্ছিল যে, দুটি অসমান মানের ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে কিনা ? রনি বলছিল অবশ্যই পারে, সানি বলছিল কখনোই না, এদের লব্ধির সর্বনিম্ন মান কখনোই শূন্য হবে না বড় জোড় দুটি ভেক্টরের মানের বিয়োগ ফল হতে পারে।

**নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :**

ক. অবস্থান ভেক্টর কী ?

খ. একক ভেক্টর ও অবস্থান ভেক্টরের মধ্যে পার্থক্য ব্যাখ্যা কর।

গ. দেখাও যে, একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টর রাশির মান সমান হলে এদের লব্ধি ভেক্টর রাশিদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

ঘ. রনি ও সানির মধ্যে কে সঠিক ? গাণিতিকভাবে প্রমাণ কর।

৪। নওরিন বলছিল যে, দুটি ভেক্টরকে গুণ করে গুণফল স্কেলার রাশি বা ভেক্টর রাশি উভয়ই পাওয়া যেতে পারে। দুটি ভেক্টর রাশির গুণফল স্কেলার হয় এ কথাটা কিছুতেই নওশিন মানতে পারছিল না। সে কেবলই বলছে দুটি ভেক্টরের গুণফল ভেক্টরই হবে। নওরিন ও নওশিন দুজনেই যুক্তিতর্কে মেতে ওঠল।

**নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :**

ক. আয়ত একক ভেক্টর কী ?

খ. চিত্রসহকারে দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণন ও ভেক্টর গুণন ব্যাখ্যা কর।

গ. ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় একটি অবস্থান ভেক্টরের রাশিমালা নির্ণয় কর।

ঘ. $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ এই ভেক্টর দুটির স্কেলার ও ভেক্টর গুণফল নির্ণয় কর এবং নওরিন ও নওশিনের যুক্তিতর্কের সমাধান দাও।

৫। $\vec{A} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 6\hat{k}$

**নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :**

ক. স্কেলার গুণন কী ?

খ. দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের দিক কীভাবে পাওয়া যায় ?

গ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

ঘ. যেকোনো দুটি ভেক্টরের গুণফল দিয়ে চারটি বাহু দ্বারা সীমাবদ্ধ একটি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়—এই উক্তির যথার্থতা প্রমাণ কর।

৬। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর।

**নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :**

ক. ভেক্টর গুণন কী ?

খ. দেখাও যে, দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে।

গ. $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর লম্ব বরাবর একক ভেক্টর কীভাবে নির্ণয় করবে ব্যাখ্যা কর।

ঘ. কোন্ শর্তে দুটি ভেক্টর লম্ব হবে আর কোন্ শর্তে দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হবে তা ভেক্টরদ্বয়ের গুণন থেকে কীভাবে জানা যায় বিশ্লেষণ করে বুঝিয়ে দাও।

৭। $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ও $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ দুটি ভেক্টর।

**নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :**

ক. স্কেলার গুণফল কী ?

খ. ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম ব্যাখ্যা কর।

গ. $\vec{A} . \vec{B}$ এর জন্য একটি রাশিমালা নির্ণয় কর।

ঘ. গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে দেখাও যে, ভেক্টরদ্বয় লম্ব হলে $A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0$ হবে এবং ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হলে $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$ হবে।

৮। একটি বস্তুকে দুটি রশি দিয়ে সমমানের দুটি বল $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দ্বারা দুটি ভিন্ন দিকে টানা হচ্ছে।

**নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :**

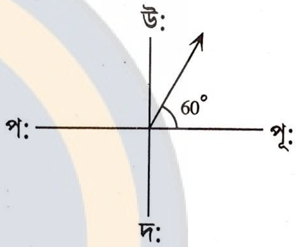
ক. একক ভেক্টর কী ?

খ. ভেক্টর বিয়োগের নিয়ম ব্যাখ্যা কর।

গ. দেখাও যে, উদ্দীপকে বর্ণিত বস্তুটি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর দিকের ঠিক মাঝখান দিয়ে যাবে।

ঘ. গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, সমমানের দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চ মান তাদের যে কোনোটির মানের দ্বিগুণ হবে।

৯। কোনো স্থানে বায়ু পূর্বদিকের সাথে $60°$ কোণে উত্তর দিকে বইছে। বায়ুর বেগের পূর্বমুখী উপাংশ $30 \text{ km h}^{-1}$




**নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :**

ক. ভেক্টরের বিভাজন কী ?

খ. উপাংশ বলতে কী বুঝ ?

গ. উদ্দীপকে বর্ণিত ঝড়ের বেগের মান কত ?

ঘ. একটি ভেক্টরকে পরস্পর লম্ব দুটি উপাংশে বিভাজিত করলে কোন দিকে কোন উপাংশ হবে তা ব্যাখ্যা কর।

১০। $\vec{A} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 8\hat{i} + m\hat{j} + 10\hat{k}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্তরাল।

**নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :**

ক. আয়ত একক ভেক্টর কী ?

খ. $\hat{i} \times \hat{i}$ কেন নাল ভেক্টর ব্যাখ্যা কর।

গ. $m$ এর মান নির্ণয় কর।

ঘ. শুধু $m$ এর মান পরিবর্তন করে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটিকে পরস্পর লম্ব করা সম্ভব— গাণিতিক যুক্তিসহ এ কথার যথার্থতা নিরূপণ কর।

১১। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল 25 একক এবং ভেক্টর গুণফলের মান $25\sqrt{3}$ একক।

**নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :**

ক. সমতলীয় ভেক্টর কী ?

খ. ভেক্টর গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে কি ? ব্যাখ্যা কর।

গ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

ঘ. উদ্দীপকের তথ্য থেকে ভেক্টর দুটির মান বের করা সম্ভব কি না গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর। সম্ভব হলে মানদ্বয় কত ?

১২। $\vec{P} = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} + m\hat{j} + 8\hat{k}$ দুটি ভেক্টর।

**নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :**

ক. নাল ভেক্টর কী ?

খ. একটি একক ভেক্টর কীভাবে পাওয়া যায়—ব্যাখ্যা কর।

গ. $m$-এর মান কত হলে উদ্দীপকে বর্ণিত ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে ?

ঘ. উদ্দীপকে বর্ণিত ভেক্টরদ্বয় কি কোনোভাবে সমান্তরাল হওয়া সম্ভব ? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

১৩। একই জাতীয় দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়া করে।

**নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :**

ক. ভেক্টর কী ?

খ. ভেক্টরের বিভাজন বলতে কী বুঝ ?

গ. ভেক্টর দুটির লব্ধির মান সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন হওয়ার শর্ত কী নির্ণয় কর।

ঘ. ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের পার্থক্য যে কোনো একটি ভেক্টরের মানের দ্বিগুণ–এর সত্যতা বিশ্লেষণ কর।

১৪। $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ এবং $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ দুটি ভেক্টর $\alpha$ কোণে ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি $\vec{R}$।

**নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :**

ক. প্রসঙ্গ কাঠামো কী ?

খ. ডট গুণন বলতে কী বুঝ ?

গ. দেখাও যে, $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

ঘ. দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফলের সূত্র কাজে লাগিয়ে দেখাও যে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লব্ধি $\vec{R}$ এর মান হবে $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha}$

১৫। $y$ হলো $x$ এর একটি অপেক্ষক এবং $y = 5x^2 + 6x$

**নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :**

ক. অপেক্ষক কী ?

খ. $\frac{dy}{dx}$ এর অর্থ বুঝিয়ে দাও।

গ. $x = 5$ এর জন্য $x$ এর সাপেক্ষে $y$ এর অন্তরক নির্ণয় কর।

ঘ. উদ্দীপকের আলোকে গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে দেখাও যে, অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণ বিপরীত প্রক্রিয়া।

১৬। $\varphi$ একটি স্কেলার অপেক্ষক যেখানে $\varphi = 3x^2yz + 4xyz + 2yz^3$ এবং $\vec{V}$ একটি ভেক্টর অপেক্ষক যেখানে $\vec{V} = 4xy^3z\,\hat{i} - 3x^3yz\,\hat{j} + 5xyz^2\,\hat{k}$।

**নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :**

ক. অপারেটর কী ?

খ. গ্রেডিয়েন্ট বলতে কী বুঝ ?

গ. $\vec{V}$ এর কার্ল নির্ণয় কর।

ঘ. উদ্দীপকের আলোকে বিশ্লেষণ করে দেখাও কীভাবে একটি স্কেলার ক্ষেত্রকে ভেক্টর ক্ষেত্রে উত্তরণ করা যায় এবং একটি ভেক্টর ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্রে রূপান্তর করা যায়।

## গ-বিভাগ : সাধারণ প্রশ্ন

১। উদাহরণসহ স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশির সংজ্ঞা দাও।

২। বল কী করে ভেক্টর রাশি হলো—বুঝিয়ে দাও।

৩। সংজ্ঞা দাও বা কাকে বলে : স্বাধীন ভেক্টর [য. বো. ২০১৭], সীমাবদ্ধ ভেক্টর [দি. বো. ২০১৭; য. বো. ২০১৯], সদৃশ ভেক্টর, বিসদৃশ ভেক্টর, সঠিক ভেক্টর, সমান ভেক্টর, ঋণাত্মক ভেক্টর, বিপরীত ভেক্টর, সমরেখ ভেক্টর, সমতলীয় ভেক্টর, নাল ভেক্টর, একক ভেক্টর [রা. বো. ২০১৭], অবস্থান ভেক্টর [ব. বো. ২০১৬; কু. বো. ২০১৬; চ. বো. ২০১৭; দি. বো. ২০১৭], সরণ ভেক্টর [ব. বো. ২০১৫], ব্যাসার্ধ ভেক্টর [ঢা. বো. ২০১৬], বিপ্রতীপ ভেক্টর [রা. বো. ২০১৯]।

৪। ভেক্টরের মান কখন ঋণাত্মক হয় এবং কেন ? ব্যাখ্যা কর। [দি. বো. ২০১৫]

৫। স্বাধীন ভেক্টরের পাদবিন্দু মূলবিন্দুতে নয় কেন ? ব্যাখ্যা কর। [সি. বো. ২০১৫]

৬। নাল ভেক্টরের সুনির্দিষ্ট দিক নেই কেন ? [রা. বো. ২০১৫]

৭। একটি বিপ্রতীপ ভেক্টরকে সমরেখ ভেক্টর বলা যেতে পারে—ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০১৭]

৮। সকল সমরেখ ভেক্টর সমান ভেক্টর নয়—বাখ্যা কর। [কু. বো. ২০১৯]

৯। ভেক্টর রাশির যোগ বা বিয়োগ সাধারণ গাণিতিক নিয়মে করা যায় না—ব্যাখ্যা কর।

১০। লব্ধি ভেক্টর কী ? [য. বো. ২০১৫]

১১। ভেক্টর রাশির যোগের নিয়ম ব্যাখ্যা কর।

১২। ভেক্টর রাশির বিয়োগের নিয়ম ব্যাখ্যা কর।

১৩। দুটি ভেক্টর রাশির যোগফল ও বিয়োগ ফলের মান সমান—ব্যাখ্যা কর। [রা. বো. ২০১৯]

১৪। একই ক্রমে ক্রিয়াশীল তিনটি ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে—ব্যাখ্যা কর। [ব. বো. ২০১৯]

১৫। ভেক্টর রাশির সামান্তরিকের সূত্রটি ব্যাখ্যা কর।

১৬। দেখাও যে, কোনো বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়াশীল একই জাতীয় দুটি ভেক্টর রাশির লব্ধির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান যথাক্রমে রাশি দুটির মানের যোগফল ও বিয়োগফলের সমান।

১৭। দুটি অসমান সমজাতীয় ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে কিনা ব্যাখ্যা কর। [চ. বো. ২০১৬; মাদ্রাসা বোর্ড ২০১৯]

১৮। ভেক্টর রাশির বিভাজন বা বিশ্লেষণ কাকে বলে ? [সি. বো. ২০১৬, ২০১৫; রা. বো. ২০১৫]

১৯। একটি ভেক্টর রাশিকে পরস্পর দুটি লম্ব উপাংশে বিভাজন কর।

২০। গুণটানার ফলে নৌকা সামনের দিকে এগিয়ে যায় কেন ? ব্যাখ্যা কর। [ব. বো. ২০১৫]

২১। লন রোলারকে ঠেলার চেয়ে টানা সহজ কেন ? ব্যাখ্যা কর।

২২। ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা রাখা হয় কেন ? ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০১৬]

২৩। আমাদের পায়ে হাঁটা কীভাবে ভেক্টর বিভাজনের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করা যায়? [সি. বো. ২০১৭]

২৪। আয়ত একক ভেক্টর বলতে কী বুঝ ? ব্যাখ্যা কর।

২৫। একটি ভেক্টরকে ত্রিমাত্রিক আয়ত স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় বিভাজন কর।

২৬। ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় একটি অবস্থান ভেক্টরের রাশিমালা নির্ণয় কর।

২৭। চিত্রসহকারে দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণন ও ভেক্টর গুণন ব্যাখ্যা কর।

২৮। ভেক্টর গুণফলের দিকসংক্রান্ত ডানহাতি স্ক্রু নিয়মটি কী ? [কু. বো. ২০১৭]

২৯। ডানহাতি স্ক্রু নিয়মের সাহায্যে বোতলের মুখ খোলা বা বন্ধ করা যায়—ব্যাখ্যা কর। [চ. বো. ২০১৯]

৩০। দেখাও যে, ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে কিন্তু ভেক্টর গুণন তা মেনে চলে না।

৩১। আয়ত একক ভেক্টর কাকে বলে ? [য. বো. ২০১৬; চ. বো. ২০১৯; ব. বো. ২০১৯; মদ্রাসা বোর্ড ২০১৯]

৩২। দেখাও যে—

(ক) $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$ এবং $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$

(খ) $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$ এবং $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

৩৩। $\hat{i}.\hat{i} = 1$ কিন্তু $\hat{i} \times \hat{i} = \vec{0}$ হয় কেন? ব্যাখ্যা কর।

৩৪। $\hat{k}.\hat{i} = 0$ কেন ব্যাখ্যা কর। [অভিন্ন প্রশ্ন (খ সেট) ২০১৮]

৩৫। যদি $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ এবং $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ হয় তবে দেখাও যে,

$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

৩৬। যদি $\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$ এবং $\vec{B} = \hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z$ হয় তবে দেখাও যে,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

৩৭। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $45^\circ$ হলে দেখাও যে, $\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A} \times \vec{B}|$

[চ. বো. ২০১৫; ব. বো. ২০১৬; সি. বো. ২০১৬]

৩৮। স্কেলার গুণফল ও ভেক্টর গুণফলের পার্থক্য নির্দেশ কর।

৩৯। ভেক্টর রাশির অন্তরীকরণ ব্যাখ্যা কর।

৪০। ভেক্টর রাশির আংশিক অন্তরীকরণ ব্যাখ্যা কর।

৪১। স্কেলার ক্ষেত্র কাকে বলে ?

৪২। ভেক্টর ক্ষেত্র কাকে বলে ?

৪৩। ভেক্টর রাশির যোগজীকরণ ব্যাখ্যা কর।

৪৪। ভেক্টর অপারেটর কাকে বলে ? [চ. বো. ২০১৫]

৪৫। একটি স্কেলার রাশির গ্রেডিয়েন্ট ব্যাখ্যা কর। [ঢা. বো. ২০১৭]

৪৬। একটি ভেক্টর রাশির ডাইভারজেন্স ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০১৯]

৪৭। একটি ভেক্টর রাশির কার্ল ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০১; সি. বো. ২০১৭; দি. বো. ২০১৯]

৪৮। ভেক্টর ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে কোনো প্রবাহীর ডাইভারজেন্স ধনাত্মক হলে কী বোঝায়?

৪৯। ভেক্টর ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে কোনো প্রবাহীর ডাইভারজেন্স ঋণাত্মক হলে কী বোঝায়?

৫০। কোনো ভেক্টর ক্ষেত্র সলিনয়ডাল হওয়ার শর্ত কী ?

৫১। রৈখিক বেগের কার্ল ও কৌণিক বেগের মধ্যকার সম্পর্ক কী ?

৫২। কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রে সংরক্ষণশীল ও অঘূর্ণনশীল হওয়ার শর্ত কী ?

৫৩। কোনো ভেক্টর ক্ষেত্র অসংরক্ষণশীল ও ঘূর্ণনশীল হওয়ার শর্ত কী ?

## ঘ–বিভাগ : গাণিতিক সমস্যা

### সেট I

[সাধারণ সমস্যাবলি

১। কোনো এক বিন্দুতে একই সময় 10 N এবং 6 N মানের দুটি ভেক্টর 60° কোণে ক্রিয়া করলে ভেক্টর দুটির লব্ধির মান নির্ণয় কর। [উ: 14 N]

২। একটি নদীর স্রোতের বেগ 5 km $h^{-1}$। স্রোতের সাথে 60° কোণে 4 km $h^{-1}$ বেগে একটি নৌকা চালনা করলে নৌকা প্রকৃতপক্ষে কত বেগে কোন্ দিকে চলবে ? [উ: 7.81 km $h^{-1}$ বেগে স্রোতের সাথে 26.33° কোণে]

৩। একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি সমান মানের ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ কত হলে এদের লব্ধির মান যেকোনো একটি ভেক্টরের মানের সমান হবে ? [উ: 120°] [বুটেক্স ২০০৩–২০০৪]

৪। একটি নদীতে স্রোতের বেগ 5 km $h^{-1}$। একটি নৌকাকে 10 km $h^{-1}$ বেগে চালনা করা যায়। কোন দিকে নৌকা চালালে অপর পারে ঠিক সোজাসুজি পৌঁছা যায় ? [উ: স্রোতের সাথে 120° কোণ করে।]

৫। কোনো বস্তুকে 10 N বলে দক্ষিণ দিকের সাথে 30° কোণে পশ্চিম দিকে টানা হলে বলের দক্ষিণমুখী ও পশ্চিমমুখী উপাংশের মান কত ? [উ: 8.66 N এবং 5 N]

৬। $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{C} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

(i) $|\vec{C}| = ?$ (ii) $|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}| = ?$ (iii) $|2\vec{A} - 3\vec{B} - 5\vec{C}| = ?$ [উ: (i) 3 (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{30}$]

৭। $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টরটি নির্ণয় কর। [উ: $\frac{3}{7}\hat{i} + \frac{6}{7}\hat{j} - \frac{2}{7}\hat{k}$]

৮। দেখাও যে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত।

৯। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [উ: 79.02°]

১০। $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}$। $m$ এর মান কত হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পরের উপর লম্ব হবে ? [উ: 27]

১১। দুটি ভেক্টর $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ এর ভেক্টর গুণফল এবং মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [উ: $-3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$; 24.87°]

১২। $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$; $\vec{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{C} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে প্রমাণ কর,

$(\vec{B} + \vec{C}) \times \vec{A} = \vec{B} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{A}$

১৩। $\vec{P} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে দেখাও যে, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পর সমান্তরাল।

১৪। $\vec{A} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 6\hat{j} - 10\hat{k}$। $m$-এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে ? [উ: –2]

১৫। $\vec{P} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উ: 52.9 একক] [চুয়েট ২০১৪–২০১৫]

১৬। $\vec{P} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{Q} = -2\hat{j} + \hat{i} + 3\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় যে সমতলে অবস্থিত তার লম্ব দিকে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [উ: $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{150}}\hat{i} - \frac{10}{\sqrt{150}}\hat{j} - \frac{7}{\sqrt{150}}\hat{k}\right)$] [য. বো. ২০০৪; দি. বো. ২০১২]

১৭। $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ হলে দেখাও যে, $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ পরস্পরের উপর লম্ব।

১৮। প্রমাণ কর যে, $(\vec{A} . \vec{B})^2 + |\vec{A} \times \vec{B}|^2 = A^2 B^2$ [রা. বো. ২০১১; চ. বো. ২০১২]

১৯। দুটি ভেক্টর $\vec{P} = \hat{i}t^2 - \hat{j}t + \hat{k}(2t+1)$ এবং $\vec{Q} = \hat{i}\,5t + \hat{j}t - \hat{k}t^3$ হলে $\frac{d}{dt}(\vec{P}.\vec{Q})$ এবং $\frac{d}{dt}(\vec{P} \times \vec{Q})$ নির্ণয় কর। [উ: $-8t^3 + 12t^2 - 2t$; $\hat{i}(4t^3 - 4t - 1) + \hat{j}(5t^4 + 20t + 5) + \hat{k}(3t^2 + 10t)$]

[কু. বো. ২০০৪; য. বো. ২০০৫]

২০। একটি কণার উপর $\vec{F} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ N বল কাজ করার ফলে কণাটির $\vec{d} = (2\hat{i} + d_y\hat{j} - \hat{k})$ m সরণ হয়। $d_y$-এর মান কত হলে সম্পাদিত কাজের পরিমাণ শূন্য হবে? [উ: 0]

২১। যদি $\varphi = 2xz^4 - x^2y$ হয় তবে $(2, -2, -1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\varphi$ এবং এর মান বের কর।

[উ: $10\hat{i} - 4\hat{j} - 16\hat{k}$; $\sqrt{372}$]

২২। যদি $\vec{A} = 3xyz\,\hat{i} + 2xy^2\hat{j} - x^2yz\,\hat{k}$ হয়, তবে

(ক) $\vec{\nabla}.\vec{A}$ ও $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ নির্ণয় কর।

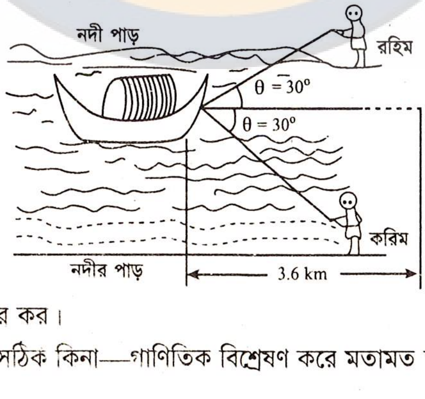
[উ: $3yz + 4xy - x^2y$; $-x^2z\,\hat{i} + (3xy + 2xyz)\hat{j} + (2y^2 - 3xz)\hat{k}$]

(খ) $(1, 1, -1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}.\vec{A}$, $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ এবং $|\vec{\nabla} \times \vec{A}|$ কত? [উ: 0; $\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$; $\sqrt{27}$]

২৩। যদি $\vec{r} = x\hat{j} + y\hat{i} + 2z\hat{k}$ তাহলে $\vec{\nabla}.\vec{r} = ?$ [উ: 4]

২৪। যদি $\vec{r} = (3y^2z)\hat{i} + (2x^3z)\hat{j} - (x^3y^2)\hat{k}$ হলে দেখাও যে $\vec{r}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল।

২৫। নিচের চিত্রে করিম ও রহিম দু'জন মাঝি স্থির পানিতে 500 kg ভরের একটি স্থির নৌকাকে নদীর দু'তীর থেকে দড়ি দিয়ে 30° কোণে $\vec{F}$ বলে টানছে। নৌকাটি 5 মিনিটে তীরের সমান্তরালে 3.6 km পথ অতিক্রম করে। করিম রহিমকে বলে "সমান টানে এ দূরত্ব 5 মিনিটের কম সময়ে পৌঁছা সম্ভব।" [নৌকার ভর ও পানির ঘর্ষণ বল উপেক্ষণীয়]।




(ক) উদ্দীপকে $\vec{F}$ এর মান বের কর।

(খ) উদ্দীপকে করিমের বক্তব্য সঠিক কিনা—গাণিতিক বিশ্লেষণ করে মতামত দাও।

[উ: (ক) 23.09 N ;

(খ) করিম ও রহিমের মধ্যবর্তী কোণ 60°-এর চেয়ে কম করলে লব্ধি বলের মান বৃদ্ধি পাবে ফলে উদ্দীপকে বর্ণিত দূরত্ব 5 মিনিটের চেয়ে কম সময়ে অতিক্রম করা সম্ভব হবে অর্থাৎ করিমের বক্তব্য সঠিক।] [রা. বো. ২০১৭]

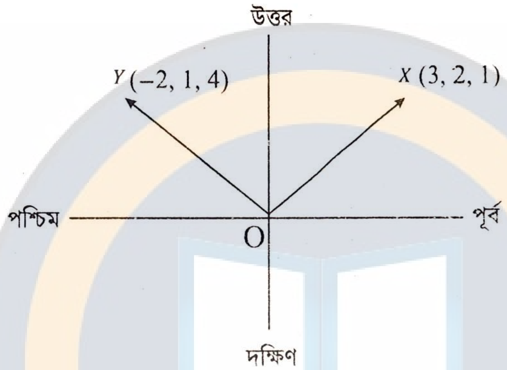
২৬। সাবিহা একদিন শপিং মতে বাজার করার সময় ট্রলি গাড়ি ব্যবহার করল। সে ট্রলি গাড়ির হেন্ডেলটিতে উল্লম্বের সাথে 30° কোণে 10 N বল প্রয়োগ করে গাড়িটিকে ঠেলতে থাকে। এই দেখে দোকানদার বলল, আপনি গাড়ির হেন্ডেল ধরে টানেন, তাহলে কম বল লাগবে।

(ক) ট্রলির গতি সৃষ্টিকারী বল কত ?

(খ) দোকানদার সাবিহাকে ট্রলির হেন্ডেল ধরে সামনে টানতে বলল কেন—যুক্তিসহ গাণিতিক ব্যাখ্যা দাও।

[উ: (ক) 5 N ; (খ) ভেক্টর রাশির বিভাজনের সাহায্যে ব্যাখ্যা করতে হবে ঠেলার চেয়ে টানা সহজ।] [য. বো.২০১৫]

২৭।



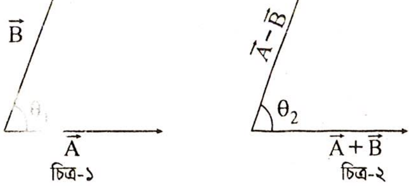

উদ্দীপকে $X$ ও $Y$ বিন্দু দুইটি কলেজের অবস্থান নির্দেশ করে। $O$, উভয় কলেজের যাত্রা অবস্থানের সাধারণ বিন্দু।

(ক) $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

(খ) $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর, এবং $\overrightarrow{OY}$ ও $\overrightarrow{OX}$ এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর একই।

[উ: (ক) 90° ; (খ) $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর $\dfrac{\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ . $\overrightarrow{OX}$ এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর $= -\dfrac{\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}}$ অর্থাৎ তল দুটির উপর লম্ব একক ভেক্টরদ্বয়ের মান এক হলেও দিক বিপরীতমুখী।] [দি. বো. ২০১৫]

২৮।




চিত্র-১ চিত্র-২

উপরের চিত্রে :

$\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

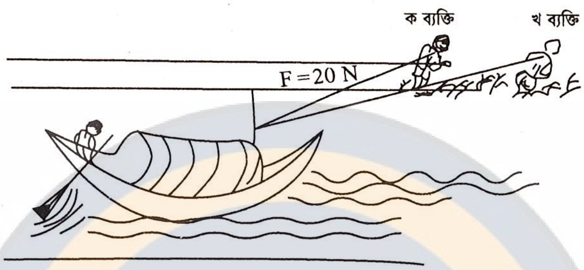
(ক) উদ্দীপকের আলোকে $\theta_1$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে $\theta_1 = \theta_2$ হওয়া সম্ভব কিনা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে সিদ্ধান্ত দাও।

[উ: (ক) $\theta_1 = 24.87°$ ; (খ) $\theta_2 = 167.5°$ $\because$ $\theta_1 \neq \theta_2$ সুতরাং উদ্দীপকে $\theta_1 = \theta_2$ হওয়া সম্ভব নয়।

[ব. বো. ২০১৬]

২৯।



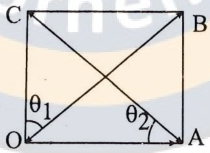

(ক) যদি ক ব্যক্তি অনুভূমিকের সাথে 45° কোণে গুণ টানে তবে বলের অনুভূমিক উপাংশ নির্ণয় কর।

(খ) যদি ক ব্যক্তি ও খ ব্যক্তি একই বলে নৌকা দুটি টানে তবে কে সহজেই নৌকাটি চালাতে পারবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ যুক্তি দাও।

[উ: (ক) 14.14 N; (খ) খ ব্যক্তি সহজে নৌকা চালাতে পারবেন কারণ দড়ি লম্বা হওয়ায় অনুভূমিকের সাথে উৎপন্ন কোণ ক ব্যক্তির চেয়ে কম হবে আর $\theta$ যত কম হবে বলের অনুভূমিক উপাংশ তত বেশি হবে। ফলে একই বল প্রয়োগ করলেও ক ব্যক্তির চেয়ে খ ব্যক্তির বলের অনুভূমিক উপাংশ বেশি হবে। সুতরাং খ ব্যক্তি সহজে নৌকা চালাতে পারবে।]

[সি. বো. ২০১৬]

৩০।




উপরের চিত্র অনুসারে OABC একটি আয়তক্ষেত্র। এর OA এবং OB বাহু দ্বারা দুটি ভেক্টর যথাক্রমে

$\vec{P} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ নির্দেশিত হয়েছে।

(ক) উদ্দীপক অনুসারে $\Delta OAB$ এক ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপক অনুসারে $\theta_1$ও $\theta_2$ এর মধ্যে কোনটি বড় তা গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে বের কর।

[উ: (ক) 4.06 বর্গ একক; (খ) $\theta_1 = 36.45°$ এবং $\theta_1 = 53.55°$ অর্থাৎ $\theta_1$ এর চেয়ে $\theta_2$ বৃহত্তর।]

[ঢা. বো. ২০১৭]

৩১। দুটি বিন্দুর ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় স্থানাঙ্কদ্বয় যথাক্রমে A (1, 0, –1) এবং B (1, 1, 0)।

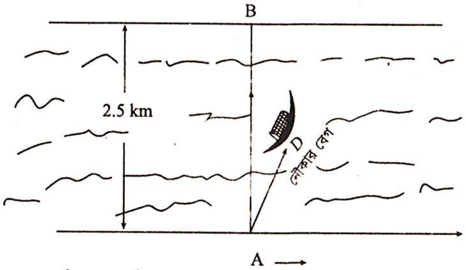
(ক) $\vec{AB}$ ভেক্টরের সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(খ) দুটি বিন্দুর $A$ ও $B$ এর অবস্থান ভেক্টরদ্বয়ের $X$-অক্ষের উপর লম্ব অভিক্ষেপ এর তুলনামূলক বিশ্লেষণ কর।

[উ: (ক) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{j} + \hat{k})$ ; (খ) $X$-অক্ষের উপর $A$ ও $B$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরদ্বয়ের লম্ব অভিক্ষেপের মান 1 অর্থাৎ উভয়ের লম্ব অভিক্ষেপের মান সমান।]

[কু. বো. ২০১৭]

৩২। একটি নৌকা চিত্রানুযায়ী 2.5 km প্রস্থের একটি নদীতে $A$ অবস্থান হতে অন্য প্রান্তে $AD$ বরাবর যাচ্ছে।



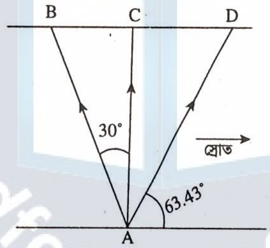

স্থির পানিতে নৌকার বেগ $= (3\hat{i} + 3\hat{j})$ m s$^{-1}$ এবং স্রোতের বেগ $= 2\hat{i}$ m s$^{-1}$। অন্য একটি ক্ষেত্রে নৌকাটিকে $AB$ বরাবর একই দ্রুতিতে চালানো হয়।

(ক) নদীর সমতলের লম্ব বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপক অনুসারে কোন ক্ষেত্রে নৌকাটি আগে অপর তীরে পৌঁছবে তা গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক উত্তর দাও।

[উ: (ক) নদীর সমতলের লম্ব বরাবর একক ভেক্টর হচ্ছে $\hat{k}$ ;
(খ) প্রথম ক্ষেত্রে তীরে পৌঁছানোর সময় 833.33 s এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে তীরে পৌঁছানোর সময় 589.26 s। সুতরাং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে নৌকাটি আগে অপর তীরে পৌঁছাবে।] [য. বো. ২০১৭]

৩৩।



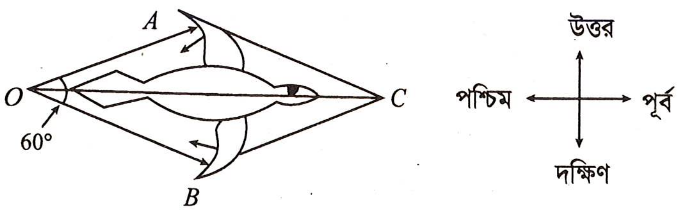

চিত্রানুযায়ী একটি নদী 31 km প্রশস্ত। দুটি ইঞ্জিন বোট আড়াআড়ি পার হওয়ার জন্য $A$ হতে অভিন্ন বেগে যাত্রা শুরু করল যাদের একটি $AB$ বরাবর অপরটি $AC$ বরাবর। প্রথমটি আড়াআড়ি পার হয়ে $C$ বিন্দুতে পৌঁছালেও দ্বিতীয়টি $D$ বিন্দুতে পৌঁছায়। স্রোতের বেগ 9 km h$^{-1}$।

(ক) উদ্দীপক হতে নৌকার অভিন্ন বেগ হিসাব কর।

(খ) নৌকা দুটি একই সময়ে নদীর অপর পারে পৌঁছায় কিনা গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও।

[উ: (ক) 18 km h$^{-1}$ ; (খ) প্রথম নৌকার নদী পার হতে সময় =1.988 h এবং দ্বিতীয় নৌকার নদী পার হতে সময় 1.722 h অর্থাৎ নৌকা দুটি একই সময়ে নদীর অপর পারে পৌঁছাবে না। দ্বিতীয় নৌকাটি প্রথম নৌকার আগে অপর পারে পৌঁছাবে।] [চ. বো. ২০১৭]

৩৪।



চিত্রানুযায়ী একটি পাখি সমতল ভূমির সমান্তরালে আকাশে উড়ছে। পাখিটির উভয় পাখা কর্তৃক ধাক্কার পরিমাণ 5 N।

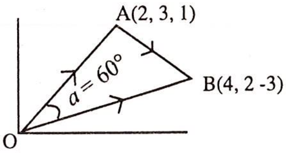
(ক) চিত্রের $OC$ বরাবর প্রতিক্রিয়া বলের মান কত ?

(খ) $AO$ বরাবর পাখার ধাক্কার পরিমাণ দ্বিগুণ হলে পাখিটি কোনদিকে উড়বে ? গাণিতিক যুক্তির মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর।

[উ: (ক) 8.66 N; (খ) পাখিটির $OB$ পাখা $OC$-এর সাথে $19.1°$ কোণ উৎপন্ন করে পূর্ব-দক্ষিণ দিকে উড়বে।]

[সি. বো. ২০১৭]

৩৫। নিম্নের চিত্রে দুটি বিন্দু $A$ ও $B$ স্থানাঙ্ক দেয়া আছে।




(ক) $AB$ সংযোগকারী ভেক্টরের মান নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের ত্রিভুজ সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করবে কি ? বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও।

[উ: (ক) 4.58 একক ; (খ) গাণিতিকভাবে $|\overrightarrow{OB}|^2 \neq |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2$ অতএব উদ্দীপকের ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করবে না।] [ব. বো. ২০১৭]

৩৬। $\overrightarrow{A} = (2x + y - z)\hat{i} + (x - 2y + 3z)\hat{j} + (x - y - z)\hat{k}$

(ক) $\overrightarrow{A}$ ভেক্টরটির ডাইভারজেন্স নির্ণয় কর।

(খ) উল্লিখিত $\overrightarrow{A}$ ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল কীনা ? গাণিতিক বিশ্লেষণ দাও।

[ উ: (ক) –1; (খ) এখানে যেহেতু $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} \neq 0$ অতএব ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল।] [মদ্রাসা বোর্ড ২০১৭]

৩৭। তিনটি বিন্দু $A, B$ ও $C$ এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, 1, -1)$, $(3, -2, 4)$ ও $(1, -3, 5)$। কোনো সুষম বেগে গতিশীল বস্তুর $B$ বিন্দু হতে $C$ বিন্দুতে পৌঁছতে 2 sec সময় লাগলো। [সব কটি রাশি এসআই এককে প্রদত্ত]

(ক) $BC$ পথে বস্তুটির বেগ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত অবস্থান ভেক্টরগুলো একই সমতলে অবস্থান করবে কী ? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

[উ: (ক) 1.22 m $s^{-1}$] ; (খ) $\because \overrightarrow{A} . \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C} = 0 \therefore$ বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত অবস্থান ভেক্টরগুলো একই সমতলে অবস্থান করবে।] [অভিন্ন প্রশ্ন (খ) সেট) ২০১৮]

৩৮। (ক) কোনো বিন্দু $P$ এর স্থানাঙ্ক $P(2, -3, 4)$ হলে বিন্দুটির অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর।

(খ) $A(2, -3, 4)$ এবং $B(-1, 2, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী দিক রাশিটি নির্ণয় কর।

[উ: (ক) $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$; (খ) $-3\hat{i} + 3\hat{j}$] [চুয়েট ২০০৫–২০০৬]

৩৯। একটি নদীর স্রোতের বেগ 5 m $s^{-1}$। 10 m $s^{-1}$ বেগের একটি নৌকায় সোজাসুজিভাবে নদী পাড়ি দিতে 1 min 40 s সময় লাগে। নদীর প্রস্থ কত ? [উ. 866.03 m] [চুয়েট ২০০৩–২০০৪]

৪০। একটি ইঞ্জিনচালিত নৌকার বেগ ঘণ্টায় 14 কিলোমিটার। একটি নদী আড়াআড়ি পার হতে হলে নৌকাটিকে কোন দিকে চালাতে হবে ? নদীর প্রস্থ 12.125 km হলে তা পাড়ি দিতে কত সময় লাগবে ? স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 7 km।

[উ: স্রোতের সাথে সাথে $120°$ কোণে; 1 ঘণ্টা] [চুয়েট ২০০৪–২০০৫]

৪১। কোনো নদীতে একটি নৌকার বেগ স্রোতের অনুকূলে ও প্রতিকূলে যথাক্রমে $18\ km\ h^{-1}$ এবং $6\ km\ h^{-1}$ নৌকাটি কত বেগে কোন দিকে চালনা করলে সোজা অপর পারে পৌঁছাবে ?
[উ: স্রোতের সাথে $120°$ কোণে $12\ km\ h^{-1}$] [বুয়েট ২০১৫–২০১৬]

৪২। ভেক্টর $\vec{A}, \vec{B}$ এবং $\vec{C}$ এর মান যথাক্রমে 12, 5 এবং 13 একক এবং $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ ভেক্টর। $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ মধ্যবর্তী কোণ কত হবে ? [উ: $90°$] [বুয়েট ২০০৬–২০০৭]

৪৩। একটি লন রোলার ঠেলা বা টানার জন্য অনুভূমিকের সাথে $30°$ কোণে $19.6\ N$ বল প্রয়োগ করা হলো। টানার সময় এর ওজন ঠেলা অপেক্ষা কত কম হবে ? [উ: $19.6\ N$ বা $1\ kg$-wt] [বুয়েট ২০১০–২০১১]

৪৪। একটি লন রোলার টানা ও ঠেলার জন্য অনুভূমিকের $30°$ কোণে $20\ N$ বল প্রয়োগ করা হলো। টানার সময় ওজন ঠেলা অপেক্ষা কত কম হবে ? [উ: $20\ N$] [জা. বি. ২০১৫–২০১৬]

৪৫। একজন সাইকেল আরোহী সমতল রাস্তার উপর দিয়ে কত বেগে চললে $6\ m\ s^{-1}$ বেগের বৃষ্টির ফোঁটা তার গায়ে $45°$ কোণে পড়বে ? [উ: $6\ m\ s^{-1}$] [কুয়েট ২০০৫–২০০৬; য.বি.প্র.বি. ২০১৫-২০১৬]

৪৬। দুটি ভেক্টর রাশির লব্ধির বৃহত্তর ও ক্ষুদ্রতর মান যথাক্রমে 28 একক ও 4 একক। রাশি দুটি পরস্পরের সাথে $90°$ কোণে কোনো একটি কণার উপর ক্রিয়া করল। লব্ধির মান কত ? [উ: 20 একক] [চুয়েট ২০১৫–২০১৬]

৪৭। একটি নৌকা নদীর প্রস্থ বরাবর $20\ m\ s^{-1}$ বেগে চলা শুরু করল। নদীর স্রোতের বেগ $15\ m\ s^{-1}$ হলে এবং নদীটি $2\ km$ প্রশস্ত হলে অপর পাড়ে পৌঁছাতে নৌকাটির কত সময় লাগবে ? নৌকাটির লব্ধি বেগ কত হবে ?
[উ: $100\ s$ ; $25\ m\ s^{-1}$] [চুয়েট ২০১৩–২০১৪]

৪৮। যদি $\vec{P} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত ?
[উ: $111.01°$] [কুয়েট ২০১৬–২০১৭]

৪৯। $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 15\hat{i} + a\hat{j} - 9\hat{k}$, $a$ এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে ? [উ: 6] [বুয়েট ২০১০–২০১১]

৫০। $\vec{P} = \hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।
[উ: $37.17°$] [বুয়েট ২০১২–২০১৩]

৫১। $\vec{A} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 9\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 10\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}$। $\vec{B}$ এর দিকে $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। [উ: 2.18] [বুয়েট ২০০০–২০০১]

৫২। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $\vec{B}$ এর দিকে $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।
[উ: $\frac{4}{7}$] [বুয়েট ২০০৯–২০১০]

৫৩। $a$-এর মান কত হলে $\vec{A} = 2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর পরস্পর লম্ব হবে ?
[উ: 3] [ঢা. বি ২০০০–২০০১]

৫৪। $\vec{A} = \hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ ও $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $B$ বরাবর $A$ এর অভিক্ষেপ বা অংশক নির্ণয় কর।
[উ: 4] [জা. বি. ২০১৬–২০১৭]

৫৫। $|\vec{A}.\vec{B}| = |\vec{A} \times \vec{B}|$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ মধ্যবর্তী কোণ কত ?
[উ: $\frac{\pi}{4}$] [জ. বি. ২০১৬–২০১৭; রুয়েট ২০১৪–২০১৫]

৫৬। $\vec{P} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[উ: 14.14 একক] [বুয়েট ২০০৬–২০০৭]

৫৭। $\vec{A} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে তার ক্ষেত্রফল কত ? [উ: 3.74 একক] [রুয়েট ২০১৪–২০১৫]

৫৮। $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C}$ [কু. বো. ২০০১]

৫৯। যদি $\vec{F} = 8\hat{i} - 2\hat{j}$ এবং $\vec{r} = 6\hat{i} - 8\hat{k}$ হয় তাহলে, $\vec{F} \times \vec{r} = ?$ [উ: $16\hat{i} + 64\hat{j} + 12\hat{k}$] [শা.বি.প্র.বি. ২০১৬–২০১৭]

৬০। $\vec{P} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\sqrt{3}\hat{k}$ ভেক্টর দুটি একটি বিন্দুতে লম্বভাবে ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি ভেক্টরের দিক ( $\vec{P}$ এর সাপেক্ষে) কত ? [উ: $59°$] [ঢা. বি. ২০০৭–২০০৮]

৬১। একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যার কর্ণদ্বয় যথাক্রমে $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k}$. [উ: 17.66 একক] [ কুয়েট ২০১৪–২০১৫]

৬২। যদি $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ হয়, তবে ভেক্টর $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। [উ: 0] [ব. বো. ২০০৯]

৬৩। $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যে সমতলে অবস্থিত তার লম্বদিকে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [উ: $-\frac{2}{\sqrt{150}}\hat{i} + \frac{11}{\sqrt{150}}\hat{j} + \frac{5}{\sqrt{150}}\hat{k}$ অথবা, $\frac{2}{\sqrt{150}}\hat{i} - \frac{11}{\sqrt{150}}\hat{j} - \frac{5}{\sqrt{150}}\hat{k}$ ] [য. বো. ২০০৬; সি. বো. ২০১০]

৬৪। $\vec{P} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় যে তলে অবস্থিত তার অভিলম্ব দিকে একটি ভেক্টর নির্ণয় কর। [উ: $8\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$] [কু. বো. ২০০৮]

৬৫। দুটি ভেক্টর $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ দ্বারা গঠিত $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ সমতলের ওপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। $\left[\text{উ: } \pm\left(\frac{7}{\sqrt{185}}\hat{i} - \frac{6}{\sqrt{185}}\hat{j} - \frac{10}{\sqrt{185}}\hat{k}\right)\right]$ [চ. বো. ২০০৮]

৬৬। যদি $\vec{A} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{B} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ হয় তবে ভেক্টরদ্বয় যে তলে অবস্থিত তার লম্ব বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় কর। $\left[\text{উ: } \pm\left(-\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}\right)\right]$ [য. বো. ২০০৯]

৬৭। একটি কণার ওপর $\vec{F} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ N বল কাজ করার ফলে কণাটির $\vec{d} = (2\hat{i} + d_y\hat{j} - \hat{k})$ m সরণ হয়। $d_y$-এর মান কত হলে সম্পাদিত কাজের পরিমাণ শূন্য হবে ? [উ: 0] [চ. বো. ২০০২]

৬৮। একটি কণার উপর $\vec{F} = (5\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k})$ N বল প্রয়োগ করার ফলে কণাটির $\vec{d} = (3\hat{i} + d_y\hat{j} + 5\hat{k})$m সরণ হলে, সম্পাদিত কাজের পরিমাণ শূন্য হবে ? [ উ: 5] [বুয়েট ২০১২–২০১৩]

৬৯। 7 kg ভরের কোনো বস্তুর উপর প্রযুক্ত একটি বল $\vec{F} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$ N হলে, যেখানে $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ একক ভেক্টর, বস্তুটি কত ত্বরণ প্রাপ্ত হবে ? [ উ: 1 m s$^{-2}$ ] [বুয়েট ২০১৩-২০১৪]

৭০। একটি কণার উপর $\vec{F} = (-5\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k})$ N বল প্রয়োগ করার ফলে কণাটির $\vec{S} = (3\hat{i} - m\hat{j} + 5\hat{k})$ m সরণ হয়। $m$-এর মান কত হলে সম্পাদিত কাজের পরিমাণ শূন্য হবে ? [ উ: –15] [রা. বি. ২০১৫–২০১৬]

৭১। একটি কণার উপর $\vec{F} = (-2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$ নিউটন বল প্রয়োগের ফলে কণাটি (3, – 4, – 2) বিন্দু থেকে (–2, 3, 5) বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয়। বল কর্তৃক সম্পাদিত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর। [ উ: –59 J] [কুয়েট ২০১৫–২০১৬]

৭২। $p$-এর মান কত হলে ভেক্টর $\vec{V} = (5x + 2y)\hat{i} + (2py - z)\hat{j} + (x - 2z)\hat{k}$ সলিনয়ডাল হবে ? [ উ: –1.5] [রুয়েট ২০১৫–২০১৬]

৭৩। $\vec{R} = 5\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$ হলে $\vec{R}$ ভেক্টরটির $X$, $Y$ ও $Z$ অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ নির্ণয় কর। [ উ: $\alpha = 85.60°$, $\beta = 91.76°$, $\gamma = 95.30°$ ]

৭৪। $\vec{A} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$, , $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$, এবং $\vec{C} = \hat{i} + m\hat{k} + 3\hat{j}$। $m$-এর মান কত হলে সামান্তরকের আয়তন 50 একক হবে ? [উ: –11]

৭৫। দেখাও যে, $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})$ যখন, $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$, $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ এবং $\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$।

৭৬। তিনটি ভেক্টর রাশি যথাক্রমে $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{C} = x^2y\hat{i} + y^2z\hat{j} + z^2x\hat{k}$,

(ক) উদ্দীপকের $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের লম্ব দিকে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের $\vec{C}$ ভেক্টরের কার্লের ডাইভারজেন্স শূন্য হবে কি ? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

[উ : (ক) $\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k}$ ; (খ) $\vec{C}$ ভেক্টরের কার্লের ডাইভারজেন্স $= -2(z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k})$ অর্থাৎ শূন্য নয়।] [চ. বো. ২০১৯]

৭৭। অনিক $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ দুটি ভেক্টর নিয়ে তাদের ডট ও ক্রসগুণন নির্ণয় করেছিল। সে দেখল যে, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ পরিবর্তন করলে তাদের ডট গুণন ও ক্রস গুণনের মান সমান হয়।

(ক) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় কোনো সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু ধরে উক্ত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) অনিকের পর্যবেক্ষণের গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও।

[উ: (ক) 8.66 একক; (খ) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 70.89°। কোণের মান পরিবর্তন করে 45° করলে অর্থাৎ কোণের মান 89° কমালে এদের ডট গুণন ও ক্রস গুণনের মান সমান হবে।] [ব. বো.২০১৯]

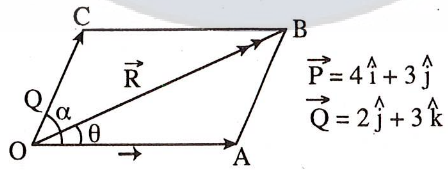
৭৮। ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $P(1, 2, -1)$, $Q(-2, 1, 1)$ এবং $R(3, 1, -2)$, যেখানে $\vec{P}$, $\vec{Q}$ এবং $\vec{R}$ প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর নির্দেশ করে।

(ক) $\vec{P}$ এর উপর $\vec{Q}$ এর লম্ব অভিক্ষেপের মান নির্ণয় কর।

(খ) P, Q এবং R বিন্দুত্রয়ের ক্রম সংযোজন দ্বারা গঠিত ক্ষেত্র একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে কিনা তা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর।

[উ: (ক) $-\frac{1}{\sqrt{6}}$; (খ) দুটি ভেক্টরের ডট গুণনের মান শূন্য হলে মধ্যবর্তী কোণ সমকোণ হয়। সমকোণী ত্রিভুজ হতে হলে দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ সমকোণ হওয়া প্রয়োজন। এ শর্ত পূরণ না করায় এদের দ্বারা গঠিত ক্ষেত্র সমকোণী ত্রিভুজ হবে না।] [য. বো. ২০১৯]

৭৯। চিত্রটি লক্ষ্য কর :




(ক) উদ্দীপকের আলোকে θ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\Delta OAB$ ও $\Delta OBC$ এর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি সামান্তরিক $OABC$ এর ক্ষেত্রফলের সমান কি না? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

[উ: (ক) 57.2°; (খ) $\Delta OAB$ এবং $\Delta OBC$ উভয়ের ক্ষেত্রফল 13.125 একক এবং সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল 26.25 একক অর্থাৎ $\Delta OAB$ এবং $\Delta OBC$ এর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি $OABC$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।